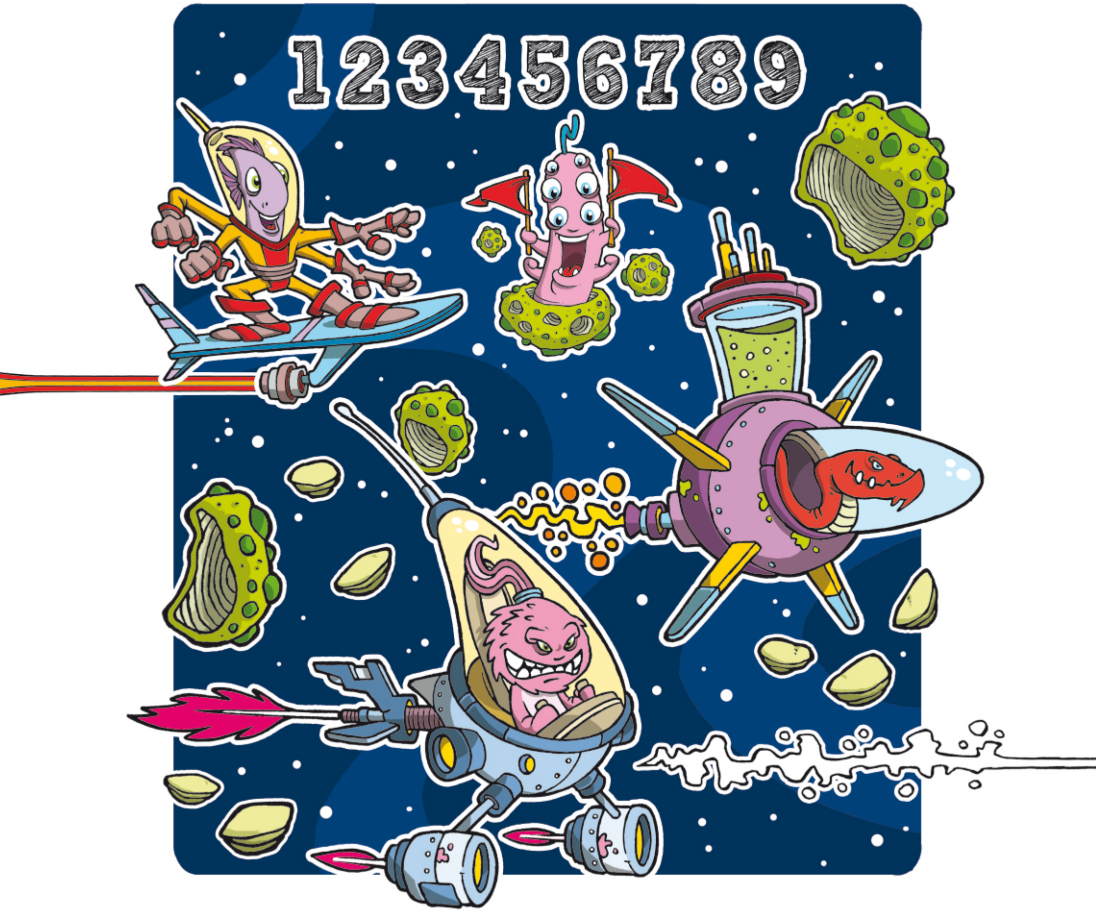
МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ

БРОЈ 4, 2019/20.

ЗА УЧЕНИКЕ ОСНОВНИХ ШКОЛА



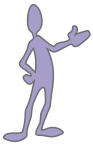
LIV-4

Београд, 2020.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
www.dms.org.rs **e-mail: info@dms.org.rs**

МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ
за ученике основних школа

Година LIV, број 4 (2020)
Излази пет пута годишње



ИЗДАЈЕ ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнез Михаилова 35/IV, п.п. 355

Главни уредник: **др Ратко Тошић**
(ratosic@gmail.com)

Одговорни уредник: **Вера Јоцковић**

Чланови редакције:
Милош Ђорић, др Јелена Јоцковић, Татјана Гргуров, Сава Максимовић, Тања Мартић, др Татјана Стојановић, Невенка Угринов, Вељко Ћировић

Технички уредник: **Милица Мисојчић**

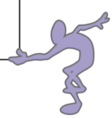
Илустрације и корице: **Срђан Стаменковић**

CIP-Каталогизација у публикацији Народна библиотека Србије, Београд

51

МАТЕМАТИЧКИ лист за ученике основних школа / главни уредник Ратко Тошић. Год. 1, бр. 1 (1967)-.-Београд (Кнез Михаилова 35): Друштво математичара Србије, 1967-(Крагујевац:Сквер).-20 cm

Двомесечно.
ISSN 0352/714X=Математички лист за ученике основне школе
COBISS.SR-ID 16493314

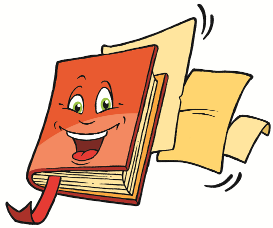


Штампа: СКВЕР, Крагујевац

2019/20. број 4

ЖИВОТИЊСКА ФАРМА

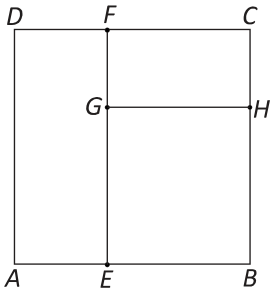
Ратко Тошић, Нови Сад



Вера хоће да оснује фарму за гајење гусака, свиња и оваца. За то јој је потребно да направи торове за све три врсте стоке. За гуске је потребан тор од најмање $25m^2$, за свиње од најмање $35m^2$ и за овце од најмање $40m^2$. Она има материјала за ограду дужине 56 метара.

Може ли она да направи торове потребне величине са расположивим материјалом? (Неки делови ограде могу бити на граници између торова.)

Доказаћемо да је то могуће. Нека је $ABCD$ квадрат странице 10 метара (слика 1). Нека су E и F тачке на страницама AB и CD редом такве да је $AE = DF = 4$ метра, G и H тачке на дужима EF и BC такве да је $EG\colon GF = BH\colon HC = 7\colon 5$. Тада је $EG = BH = \frac{35}{6}m$ и $GF = HC = \frac{25}{6}m$. Правоугаоници $GHCF$, $EBHG$ и $AEFD$ имају редом површине $25m^2$, $35m^2$ и $40m^2$ и представљају тражене торове за гуске, свиње и овце. При томе је укупна дужина свих ограда тачно 56 метара.



слика 1

Интересантан би био одговор на следећа питања:

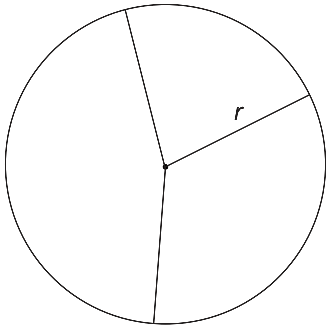
1. Да ли је могуће квадрат површине $100m^2$ поделити дужима на три дела са површинама од 25, 35 и 40 квадратних метара, а да при томе збир дужина свих линија буде мањи од 56 метара?
2. Да ли је уопште могуће поделити дужима неки правоугаоник површине бар $100m^2$, на три дела чије су површине редом бар 25, 30 и 40 метара квадратних, а да при томе збир дужина свих линија не буде већи од 56 метара?

Следећи задатак је намењен ученицима осмог разреда.

Задатак 1. Да ли Вера може да направи торове површина $40m^2$, $35m^2$и $25m^2$ ако има на располагању материјал за само 55 метара ограде? Торови не морају бити правоугаоног, нити уопште многоугаоног, облика.

Решење. У претходном случају смо квадрат површине $100m^2$ поделили на три правоугаоника са траженим површинама и укупном дужином линија које ограничавају делове квадрата од 56 метара.

Покушаћемо сада да то исто постигнемо делећи круг површине не мање од $100m^2$ са три полупречника на три кружна исечка, тако да збир обима круга и дужина три полупречника не буде већи од 55 метара (слика 2).



слика 2

Ако је полупречник круга r, онда је за круг површине не мање од $100m^2$, $r \geq \frac{10}{\sqrt{\pi}}$.

Непосредним рачунањем показује се да је $5{,}7 \geq \frac{10}{\sqrt{\pi}}$. Сад ћемо проверити да ли се са полупречником $r = 5{,}7$ може постићи тражени циљ.

Непосредним израчунавањем налазимо да је површина круга полупречника 5,7 једнака

$$5{,}7^2\pi > 5{,}7^2 \cdot 3{,}14 = 32{,}49 \cdot 3{,}14 = 102{,}0186 > 100\ m^2,$$

док је збир његовог обима и дужина три полупречника једнак

$$2 \cdot 5{,}7\pi + 3 \cdot 5{,}7 < 2 \cdot 5{,}7 \cdot 3{,}15 + 3 \cdot 5{,}7 = 53{,}01 < 55$$

метара. Дакле, Вера не само да може оградити торове потребне величине са расположивим материјалом, него ће јој још и преостати материјала за скоро два метра ограде.

Још већу уштеду Вера може остварити ако је полупречник круга $r = 5{,}68$ метара. Непосредним рачунањем може се проверити да се тада са оградом дужине $52{,}824$ метра могу оградити торови укупне површине мало веће од $101{,}3\ m^2$.

СПЕЦИЈАЛНИ ЗАДАТАК БРОЈ 101

Десет најуспешнијих решавалаца овог задатка биће награђено. Упутство за слање решења је на страни 48.

Земљиште облика круга је са три полупречника подељено на три кружна исечка (тора) чије се површине односе се као $5:7:8$. Одреди углове између полупречника.

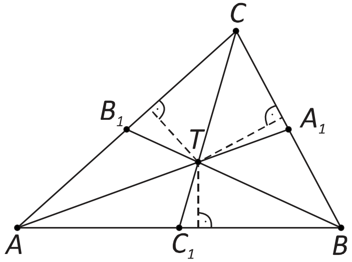
О РАЗЛАГАЊУ ТРОУГЛА НА ЧЕТВОРОУГЛОВЕ

Ратко Тошић, Нови Сад

Лако се доказује следеће тврђење:

Тежишне линије троугла деле троугао на шест мањих троуглова једнаких површина.

Доказ. Нека су AA_1, BB_1, CC_1 тежишне линије троугла ABC и T његово тежиште (слика 1).



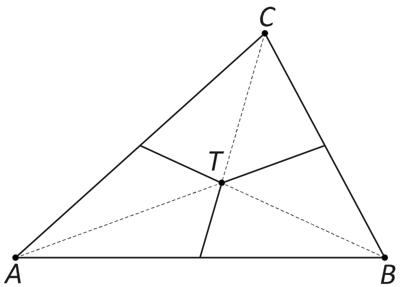
слика 1

Троуглови AC_1T и BC_1T имају једнаке површине, јер су им једнаке основице AC_1 и BC_1 и заједничка висина из темена T. На исти начин закључујемо да и троуглови BA_1T и CA_1T имају једнаке површине, као и троуглови CB_1T и AB_1T.

С друге стране површина троугла ACT је два пута већа од површине троугла AC_1T, јер је основица CT два пута већа од основице C_1T, а висина из темена A је заједничка. Следи да су површине троуглова AC_1T и AB_1T једнаке. На исти начин закључујемо да и троуглови BC_1T и BA_1T имају једнаке површине, као и троуглови CA_1T и CB_1T, одакле лако следи тврђење задатка.

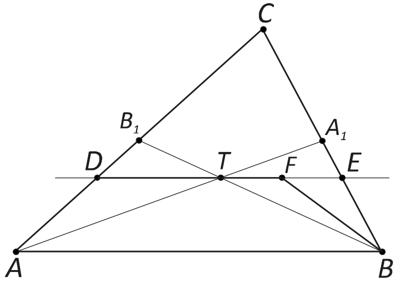
Задатак 1. Докажи да се сваки троугао може разрезати на три конвексна четвороугла једнаких површина.

Решење. Сваки троугао се може разрезати на три четвороугла тако што се његово тежиште споји дужима са средиштима страница (слика 2). Конвексност та три четвороугла се лако доказује посматрањем средњих линија троугла. Једнакост њихових површина следи на основу претходног тврђења.



слика 2

Задатак 2. Докажи да се сваки троугао може разрезати на два четвороугла једнаких површина.
Решење. Повуцимо праву кроз тежиште T троугла ABC, паралелну са страницом AB (слика 3). Нека су D и E њене тачке пресека са страницама AC и BC редом и F тачка дужи DE таква да је $DF = 3FE$ (F је средиште дужи TE). Тада се лако проверава да трапез $ABFD$ и четвороугао $DCBF$ имају једнаке површине. Наиме, троугао ABT и четвороугао B_1CA_1T имају једнаке површине (A_1 је средиште странице BC). Такође су једнаке површине троуглова TBF и EFB, а површина троугла ADT једнака је збиру површина троуглова DB_1T и EA_1T (B_1 је средиште странице AC).



слика 3

Задатак 3. Докажи да се сваки троугао може разрезати на 2019 конвексних четвороуглова са једнаким површинама.
Решење. Доказаћемо општије тврђење: Сваки троугао се може разрезати на n конвексних четвороуглова једнаких површина, где је n произвољан природан број дељив са 3.

Нека је $n = 3k$, где је k природан број. Према задатку 1, сваки троугао се може разрезати на три конвексна четвороугла са једнаким површинама тако што се његово тежиште споји дужима са средиштима страница.

С друге стране, сваки троугао ABC може се разрезати на k троуглова једнаких површина. Посматрајмо $k-1$ тачака странице BC које ту страницу деле на k подударних дужи. Повлачењем дужи које теме A спајају са тим тачкама поделе добијамо поделу троугла ABC на k троуглова једнаких површина.

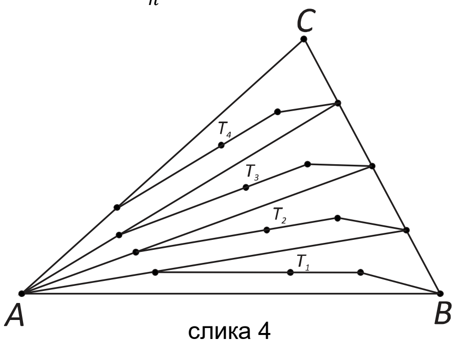
Дељењем сваког од k добијених троуглова на три конвексна четвороугла једнаких површина, добијамо тражену поделу троугла ABC.

Задатак 4. Докажи да се сваки троугао може разрезати на n четвороуглова једнаких површина, за сваки природан број n.
Решење. Означимо површину троугла ABC са S. Посматраћемо два случаја:

(1) Број n је паран: $n = 2k$.

Поделимо страницу BC троугла ABC са $k-1$ тачака на k подударних делова (на слици 4 је представљен случај $n = 8$). Спојимо дужима теме A са тим тачкама поделе. Тиме је троугао ABC подељен на k троуглова једнаких површина.
(Површина сваког је $\frac{2}{n}S$). Према задатку 2, сваки тај троугао се може поделити

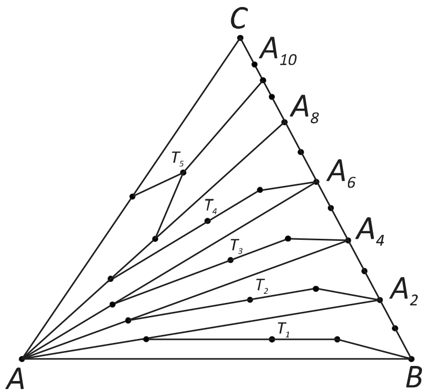
на два четвороугла једнаких површина. Тиме је троугао ABC подељен на $n = 2k$ четвороуглова, сваки површина $\frac{1}{n}S$.



слика 4

(2) Број n је непаран: $n = 2k + 1$.

Поделимо страницу BC троугла ABC са $2k$ тачака на $2k+1$ подударних делова (на слици 5 је представљен случај $n = 11$). Нека су тачке поделе редом $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2k}$. Спојимо дужима теме A са тачкама $A_2, A_4, \ldots, A_{2k-2}$. Дужи $AA_2, AA_4, \ldots, AA_{2k-2}$ деле троугао ABC на k троуглова, међу којима је $k-1$ троуглова површине $\frac{2}{n}S$ и један троугао (троугао $AA_{n-3}C$) површине $\frac{3}{n}S$. Према задатку 2, сваки од првих $k-1$ троуглова може се поделити на два четвороугла површине $\frac{1}{n}S$, а последњи се може поделити на три четвороугла површине $\frac{1}{n}S$.

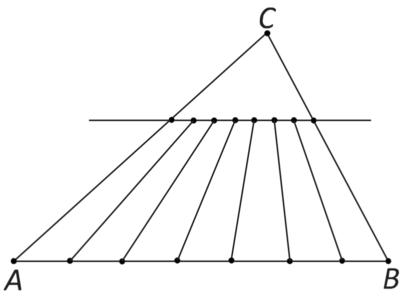


слика 5

У следећем задатку доказујемо нешто општије тврђење од оног у претходном задатку. Овај задатак је намењен ученицима осмог разреда, јер подразумева знање о сличности геометријских фигура.

Задатак 5. Докажи да се сваки троугао може разрезати на n конвексних четвороуглова једнаких површина, за сваки природан број n.

Решење. Нека је S површина датог троугла ABC. Повуцимо праву паралену страници AB која од троугла ABC одсеца троугао површине $\frac{3S}{n}$ (на слици 6 је представљен случај $n = 10$).



слика 6

Остатак чини трапез који се може поделити на било који број, па и на $n-3$ трапеза једнаких површина (поделити обе основице на $n-3$ једнаких дужи и спојити одговарајуће тачке поделе). Сваки од тих трапеза има површину $\frac{1}{n}S$. Према задатку 1, одсечени троугао може се поделити на три конвексна четвороугла површине $\frac{1}{n}S$. На тај начин је троугао ABC подељен на n конвексних четвороуглова једнаких површина.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД

Дат је троугао ABC. Помоћу шестара и лењира конструисати једну поделу тога троугла на 10 конвексних четвороуглова једнаких површина.

РАЧУНАРСТВО

Упутство за слање решења конкурсних задатака из рачунарства је на страни 48.

КОНКУРСНИ ЗАДАТАК ИЗ РАЧУНАРСТВА БР. 216 (ЗА I КАТЕГОРИЈУ)

I категорија су ученици петог и шестог разреда

Мара и Нина су договориле да играју игрицу док не пређу одређен број нивоа. Знају да је прелазак сваког нивоа временски ограничен и да за сваки наредни ниво имају 10 секунди мање него за претходни. Мара и Нина играју наизменично без обзира да ли су успешно прешле ниво или не. Написати програм у коме се најпре учитава колико нивоа ће Мара и Нина играти, потом минимално време потребно за прелазак првог нивоа и затим времена која су постигле, при чему се зна да играју наизменично и да Нина креће прва. Програм треба да испише колико нивоа је Мара успешно прешла, а колико Нина. Претпоставити да ће минимално време за прелазак сваког нивоа бити веће од 0.

Пример. Улаз: N = 3 T = 150 V : 160 148 120 140 173 115
Излаз: 2 1

Објашњење: I ниво, мин. 150s: Нина 160s - неуспешно, Мара 148s - успешно
II ниво, мин. 140s: Нина 120s - успешно
III ниво, мин. 130s: Мара 140s - неуспешно, Нина 173s - неуспешно, Мара 115s - успешно

КОНКУРСНИ ЗАДАТАК ИЗ РАЧУНАРСТВА БР. 217 (ЗА II КАТЕГОРИЈУ)

II категорија су ученици седмог и осмог разреда

Јован игра игрицу у којој се сваки ниво састоји из истог броја поднивоа. Поједини поднивои су означени као „тешки“. Уколико се тежак подниво пређе за предвиђено време или брже, играч добија 10 поена и може да пређе на следећи подниво истог нивоа, ако постоји. Уколико играч „тежак“ подниво пређе за веће време од предвиђеног, добија 5 поена и прелази на следећи ниво, прекскачући поднивое на истом нивоу, односно завршава игру ако нема више нивоа. За обичне поднивое не постоји временско ограничење и прелазак поднивоа доноси играчу 5 поена. Када је завршио са поднивоима једног нивиоа играч аутоматски прелази на следећи ниво, ако постоји. Написати програм у коме се, најпре, уноси колико нивоа има игрица и колико поднивоа имају нивои, затим број „тешких“ поднивоа и за сваки тај подниво се уноси на ком је нивоу и који је по реду на том нивоу и које је минимално време, потом се редом уносе времена за која је Јован прелазио поднивое, под претпоставком да је сваки подниво играо само једанпут. Програм исписује колико је поена Јован освојио.

Пример.

Улаз: N = 3 P = 4 BT = 4 T: 1 2 100 2 2 120 2 4 200 3 1 140
V : 155 130 92 115 140 146 148

Излаз: 40

Објашњење: Јован је прешао цео први ниво, на другом нивоу други подниво није прешао довољно брзо, па је прешао на трећи ниво, где не првом поднивоу није постигао потребно време и завршио је игрицу.

РЕШЕЊЕ КОНКУРСНОГ ЗАДАТКА ИЗ РАЧУНАРСТВА БР. 214

```
n = 0
b = 0

while n < 3:
   m = int(input())
   if m == 1:
      n = n + 1
      b = b + 1
   else:
      n = 0
print(b)
```

На почетку је потребно доделити почетне вредности променљивим *n* и *b* које броје број узастопних победа и број укупних победа, респективно. Позиције на којима је Јован завршио трке се уносе све док је вредност променљиве *n*, тј. број узастопних победа, мања од 3. Уколико је унета позиција 1, вредност обе променљиве и *n* и *b* се увећава за 1, а у супротном се вредност променљиве *n* поставља на 0, тј. низ узастопних победа је прекинут. На крају програма се исписује вредност променљиве *b*, односно број узастопних победа.

Милутин Станковић, V_2, ОШ „Вук Караџић", Шабац

РЕШЕЊЕ КОНКУРСНОГ ЗАДАТКА ИЗ РАЧУНАРСТВА БР. 215

```
n = int(input())
r = []
for i in range(n):
    t = float(input())
    r.append(t)
    r.sort()
    print(r[:5])
```

На почетку се уноси колико пута су другарице одиграле ниво у игрици. Резултати, тј. постигнута времена се памте у низу *r*. Након сваког одиграног ниво учитава се време, додаје у низ *r*, елементи низа се *r* се потом сортирају у неопадајућем поретку и исписује се првих 5 елемената низа *r*.

Мина Симић, VII_1, Ваљевска гимназија, Ваљево

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Задаци из ове рубрике имају за циљ помоћ како ученицима, тако и наставницима. Разврстани су у три групе у складу са стандардима знања из математике за крај обавезног образовања. Дати су предлози контролних и писмених задатака, при чему је у угластим заградама [ ] дата варијанта за другу групу. Неки задаци имају понуђене одговоре, па су погодни као припрема за такмичење *Кенгур без граница*.

Резултате и упутства у вези са задацима из ове рубрике можете пронаћи на сајту Друштва математичара Србије у секцији о Математичком листу.

III разред

МНОЖЕЊЕ И ДЕЉЕЊЕ. ЈЕДНАЧИНЕ. РАЗЛОМЦИ. ДЕЉЕЊЕ СА ОСТАТКОМ

Основни ниво

1. Израчунај, па повежи збир једнаких сабирака са одговарајућим производом, а производ са одговарајућим решењем, као што је започето.

$10+10+10+10$	$3\cdot 1$	18
$3+3+3+3+3$	$6\cdot 5$	30
$1+1+1$	$2\cdot 9$	40
$9+9$	$5\cdot 3$	3
$5+5+5+5+5+5$	$4\cdot 10$	15

2. Израчунај:

а) $30 \cdot 3$, б) $83 \cdot 10$, в) $72 \cdot 3$, г) $48 \cdot 6$,
д) $40 : 2$, ђ) $50 : 10$, е) $700 : 100$, ж) $170 : 5$.

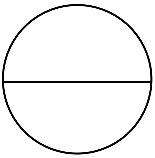
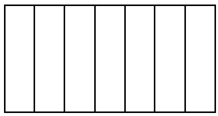
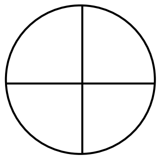
3. Повежи једначину са њеним решењем.

$6 \cdot x = 60$	$x \cdot 7 = 868$	$x : 3 = 210$	$963 : x = 107$

124	9	10	630

Средњи ниво

4. Обој део фигуре који одговара разломку испод слике.

а)	б)	в)	г)
			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$

5. Израчунај вредност израза:
а) $(48 + 44) \cdot 10$, б) $(46 - 39) \cdot 100$, в) $(158 + 12) : 10$, г) $(264 - 64) : 100$.

6. Пера има 75 кликера, а Марко 3 пута више од њега. Колико кликера они имају заједно?

7. Сакупљањем старе хартије петоро деце је зарадило 735 динара. Колико динара ће добити свако дете, ако зараду поделе на једнаке делове?

Напредни ниво

8. Упореди разломке. У поља упиши један од знакова < или > .

$\frac{1}{3} \square \frac{1}{6}$ $\frac{1}{4} \square \frac{1}{2}$ $\frac{1}{9} \square \frac{1}{7}$ $\frac{1}{8} \square \frac{1}{10}$ $\frac{1}{5} \square \frac{1}{2}$

9. Попуни таблицу.

Дељеник	204	415	511	608	900
Делилац	2	4	5	6	7
Количник					
Остатак					

10. Израчунај.

а) $\frac{1}{2}$ од 500 је број _______.	б) $\frac{1}{3}$ од 201 је број _______.
в) $\frac{1}{6}$ од једног часа је _______ минута.	г) $\frac{1}{4}$ године је ____________месеца.
д) 6 је $\frac{1}{10}$ од ______________.	ђ) 7 је $\frac{1}{5}$ од ______________.
е) 100 је $\frac{1}{2}$ од ______________.	ж) 8 је $\frac{1}{3}$ од ______________.

11. Код бака Нате у дворишту су само кокошке и прасићи. Ако је у том дворишту избројано 260 ногу, а знамо да је прасића било 24, колико има кокошака?

12. Којим бројем треба поделити претходник броја 316, да би се добио број 5?

КОНТРОЛНА ВЕЖБА – 20 минута

Множење и дељење

1. Израчунај производе, па повежи са тачним решењем:

$35 \cdot 10$ •	• 585	$27 \cdot 10$ •	• 552
$23 \cdot 2$ •	• 508	$31 \cdot 3$ •	• 672
$127 \cdot 4$ •	• 654	$138 \cdot 4$ •	• 270
$218 \cdot 3$ •	• 46	$246 \cdot 3$ •	• 93
$117 \cdot 5$ •	• 350	$112 \cdot 6$ •	• 738

2. Израчунај количнике. Прикажи поступак у својој свесци. Провери тачност дељења множењем.

а) $260 : 2 =$ _____ [$570 : 5 =$ ____], б) $360 : 3 =$ ______ [$480 : 4 =$ _____], в) $655 : 5 =$ ______ [$234 : 2 =$ ____], г) $568 : 8 =$ ______ [$738 : 9 =$ ______].

3. Тања је у књижари потрошила 1000 динара. Купила је четири велике и пет малих свезака. Ако велика свеска кошта 140 динара, колико кошта мала свеска?

КОНТРОЛНА ВЕЖБА – 20 минута

Једначине

1. Заокружи слово испред једначине која има решење 15 [120]?

а) $x \cdot 5 = 100$ [$x : 2 = 55$]; б) $x \cdot 4 = 60$ [$x : 5 = 23$];) $x \cdot 7 = 175$ [$x : 3 = 40$].

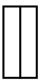
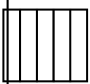
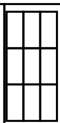
2. Који број помножен са 5 даје следбеник производа бројева 467 и 2?

3. Количник бројева 420 и x једнак је производу бројева 84 и 5. Израчунај x.

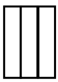
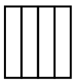
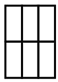
КОНТРОЛНА ВЕЖБА – 20 минута

Разломци

1. Обој део фигуре који одговара разломку испод слике.

фигура			
разломак	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$

[

фигура			
разломак	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

]

2. Шта је веће $\frac{1}{10}$ [$\frac{1}{2}$] броја 450 [420] или $\frac{1}{5}$ [$\frac{1}{4}$] броја 450 [420]?

3. Упореди разломке, у празна поља упиши један од знакова < или >.

$\frac{1}{2} \square \frac{1}{8}$ $\frac{1}{5} \square \frac{1}{10}$ $\frac{1}{6} \square \frac{1}{3}$ $\frac{1}{3} \square \frac{1}{2}$

[$\frac{1}{4} \square \frac{1}{2}$ $\frac{1}{10} \square \frac{1}{5}$ $\frac{1}{3} \square \frac{1}{9}$ $\frac{1}{4} \square \frac{1}{8}$]

КОНТРОЛНА ВЕЖБА – 15 минута

Дељење са остатком

1. Одреди количник и остатак при дељењу броја 47 [53] са 5 [6].

2. Који остаци се могу добити при дељењу са бројем 7 [4]?

3. Породица Перић иде на одмор за 36 [25] дана. За колико седмица и дана породица Перић иде на одмор?

IV разред

БРОЈЕВНИ ИЗРАЗИ. ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ. РАЗЛОМЦИ

Основни ниво

1. Израчунај: а) (90 – 30) : 6 – 1; б) (90 – 30) : (6 – 1); в) 90 – 30 : (6 – 1); г) 90 – (30 : 6 – 1).

2. Реши једначине: а) 19 · *x* = 399; б) *x* : 23 = 37; в) 17 · *x* – 323 = 0; г) 101 + 13 · *x* = 244.

3. Одреди: а) $\frac{1}{7}$ броја 161; б) $\frac{4}{9}$ броја 117; в) број чија је деветина 27; г) број чије $\frac{3}{8}$ су 69.

Средњи ниво

4. Израчунај вредност израза $2 \cdot a + 9999 : b$ ако је a најмањи непаран троцифрени број, а b највећи двоцифрени број.

5. Милица је написала 5 бројева тако да је сваки следећи број два пута већи од претходног. Збир највећег и најмањег од тих бројева је за 9 већи од збира преостала три броја. Које бројеве је Милица написала?

6. Одреди све природне бројеве *x* ако је: а) (*x* – 19) · 18 = 414; б) (4 · *x* – 4) · 44 ≤ 528.

7. У једној школи има 1200 ученика. Четвртина су одлични, трећина врло добри, петина добри и осмина довољни. Колико у тој школи има ученика са недовољним успехом?

Напредни ниво

8. Израчунај вредност израза (513 : 3 + 4 · 26) : 5 – 2 · (22 – (9999 : 33) : 101).

9. Мира и Тања су имале исте суме новца. Пошто је Мира потрошила 184 динара, а Тања 346, онда је Мири остало четири пута више новца него Тањи. Колико је новца свака од њих имала на почетку?

10. Одреди двоцифрени број који се повећа 16 пута ако му с леве стране допишемо број 3.

11. Бора је изнајмио бицикл по цени од 100 динара, уз доплату од 20 динара по сваком сату коришћења.
а) Колико укупно треба Бора да плати ако је бицикл користио два и по сата?
б) Колико највише сати може Бора да користи изнајмљени бицикл ако за то може да потроши 220 динара?

12. У воћњаку има 360 стабала крушака и јабука. Половина броја стабала крушака једнака је четвртини броја стабала јабука. Колико има стабала јабука?

КОНТРОЛНА ВЕЖБА – 20 минута

Разломци

1. Напиши колико је:
а) осмина броја 152 [136], б) пет осмина броја 80 [40], в) четири деветине броја 36 [72].

2. Израчунај: а) $\frac{1}{5}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$ броја 1080; б) $\frac{3}{5}$ $\left[\frac{5}{6}\right]$ броја 570; в) $\frac{3}{7}$ $\left[\frac{5}{7}\right]$ броја 679.

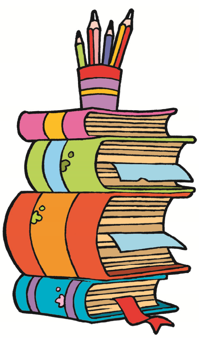
3. а) Шестина [петина] броја *b* једнака је броју 60. Одреди број *b*.
б) Одреди број *x*, ако је $\frac{5}{6}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$ тог броја једнако броју 210.

4. Ивана је уштедела 770 [912], динара, а то је тек две трећине [три четвртине] новца који јој је потребан да купи књигу о Харију Потеру. Колика је цена те књиге?

ЧЕТВРТИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

1. Израчунај вредност израза:
а) 25 · 73 · 4 [4 · 97 · 25];
б) 1536 · 0 + 138 [2879 · 0 + 357];
в) 19 · 36 – 36 : 4 [17 · 42 – 42 : 7];
г) 93 + 7 · (52 – (5 · 9 + 7)) [97 + 3 · (57 – (6 · 8 + 9))].

2. Израчунај:
а) $\frac{1}{5}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$ броја 1460; б) $\frac{3}{4}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$ броја 1236;
в) број *b*, ако је $\frac{2}{3}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$ тог броја једнако 516.



3. Реши једначине:
а) $x : 19 = 19$ $[x : 17 = 17]$;
б) $4 \cdot x + 126 = 274$ $[6 \cdot x + 134 = 392]$.

4. Одреди скуп решења неједначине:
а) $37 \cdot x < 185$ $[29 \cdot x < 116]$;
б) $x \cdot 17 - 635 \geq 1082$ $[x \cdot 11 - 715 \geq 1507]$.

5. Једно одељење четвртог разреда има 16 [15] девојчица и оне чине $\frac{4}{7}$ $\left[\frac{5}{9}\right]$ одељења. Колико у том одељењу има дечака?

V разред

ОСНА СИМЕТРИЈА. РАЗЛОМЦИ (трећи део)

Основни ниво

1. а) Сваки од бројева 25%, 8%, 33% напиши разломљеним и децималним записом.
   б) Сваки од бројеве $\frac{17}{100}$; 0,54; 0,04; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{17}{25}$ запиши у процентном запису.

2. Израчунај аритметичку средину бројева 1,5; 0,9; 0; 2.

3. а) Нацртај произвољну дуж, па конструиши њену симетралу.
   б) Нацртај произвољан угао, па конструиши његову симетралу.
   в) Нацртај праву и тачку ван ње, па конструиши нормалу из тачке на праву.

Средњи ниво

4. Када се припрема џем од кајсија треба помешати воће и шећер у односу 10:7. Колико треба шећера за џем, ако имамо 4,5 килограма кајсија?

5. У једном одељењу тест из математике је радило 24 ученика и просеча оцена је била $2\frac{11}{12}$. Колики је збир свих оцена на том тесту?

6. У овом задатку се користе званични подаци са овогодишњег финала отвореног првенства Аустралије у тенису.
   а) Новак Ђоковић је одсервирао 134 прва сервиса и њих 87 је било успешно. Колико процената од укупног броја свих сервиса је било успешно (одговор заокружи на цео број поената)?
   б) Доминик Тим је одсервирао 108 успешних првих сервиса. Ако званична статистика каже да је његова упешност првог сервиса била 64%, колико је он одсервирао првих сервиса?

7. Нацртај троугао ABC тако да је $AC > BC$, конструиши нормалу n из темена C на праву AB и пресликај троугао ABC осном симетријом у односу на нормалу n.

Напредни ниво

8. Пшенично и кукурузно брашно је помешано у размери 5:3. Колико процената те смеше је кукурузно брашно?

9. Нацртај троугао ABC, а затим конструиши тачку на симетрали угла ABC која је једнако удаљена од темена A и B.

10. У једном јуниорском кошаркашком клубу има 19 играча и њихова просечна висина је 1,9 метара. Колика ће бити просечна висина када у клуб дође још 6 играча чија је просечна висина 2 метра?

11. Вељко је појео 65% пите, а Сава 80% од преосталог дела. Колико процената пите није поједено?

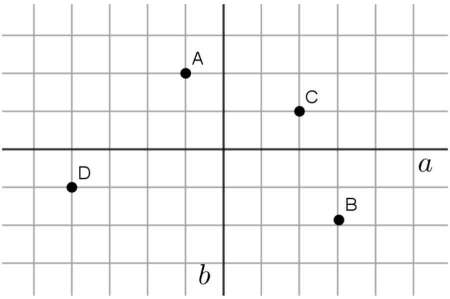
12. У једној врећи има куглица разних боја од којих је 65% зелене боје. Када се из вреће извуче 5 куглица које нису зелене боје, проценат зелених куглица порасте на 70. Колико је у почетку било куглица у врећи?

КОНТРОЛНА ВЕЖБА – 30 минута

Осна симетрија

1. Нацртај три неколинеарне тачке $A, B, C,$ па затим конструиши:
   а) симетралу дужи BC [угла BCA];
   б) нормалу из тачке B [A] на праву AC [BC].

2. За сваку од датих тачака у квадратној мрежи одреди њој симетричну тачку у односу на праву a [b].



3. Нацртај угао pOq [дуж AB], па га [је] подели на четири једнака дела.

4. Нацртај произвољни троугао $ABC,$ па га пресликај осном симетријом у односу на праву одређену средиштима страница AB и BC [CA и AB].

5. Нацртај две тачке $A, B[C, D]$, а онда коструиши кружницу полупречника 3[4] центиметра која садржи тачке $A, B[C, D]$.

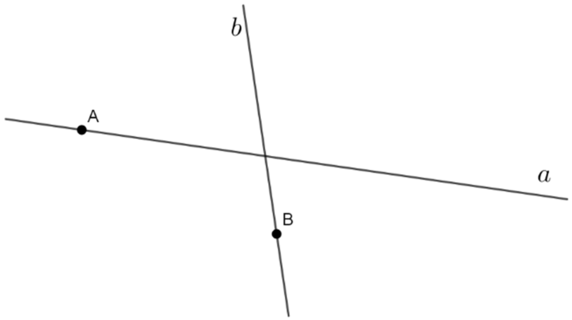
ЧЕТВРТИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

1. У једној породица отац има 50 година, мајка 48 година и син и ћерка по 22 године. Колика је просечна старост чланова те породице?

2. У једном одељењу од 20 ученика направљена је анкета о платформама мобилних уређаја. Четворо ученика користи iOS, три ученика Windows, док

остали ученици користе Android. Изрази у процентима заступљеност сваке од три наведене платформе у том одељењу.

3. На слици је дата дуж AB и праве a, b. Конструиши дуж $A'B'$ која је симетрична дужи AB у односу на праву a [b] и дуж $A''B''$ која је симетрична дужи $A'B'$ у односу на праву b [a].



4. Нацртај троугао чије су све странице различите, а онда темена тог троугла означи са A, B, C тако да важи $AB > BC > CA$ [$AB < BC < CA$]. Конструиши тачку:
а) E која припада страници AB [CA] такву да је $CE \perp AB$ [$BE \perp CA$];
б) F која припада страници BC и једнако је удаљена од тачака A и B [C и A];
в) G која припада страници CA [AB] и једнако је удаљена од страница AB и BC [BC и CA].

5. Цена једног производа је најпре снижена [повећана] за 30%, а затим је добијена цена повећана [снижена] за 40% и сада износи 1911 динара. Колика је била првобитна цена овог производа?

VI разред

КОНСТРУКЦИЈА ПАРАЛЕЛОГРАМА. ВЕКТОРИ. ТРАПЕЗ. СРЕДЊА ЛИНИЈА ТРОУГЛА И ТРАПЕЗА

Основни ниво

1. Конструиши а) квадрат чија је дијагонала 5 *cm*; б) правоугаоник чије су дијагонале по 6 *cm* и секу се под углом од 60º.

2. а) Нацртај паралелограм *ABCD* са страницама *AB* = 6 *cm*, *BC* = 4 *cm* и углом *BAD* од 60º. б) Одреди $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.

3. Странице трапеза *ABCD* (*AB*||*CD*) су *AB* = 10 *cm*, *BC* = 5 *cm*, *CD* = 6 *cm*, *DA* = 4 *cm*. Израчунај дужину средње линије и обиме четвороуглова на које средња линија дели дати трапез.

Средњи ниво

4. Конструиши паралелограм *ABCD* ако је $AB = 5\ cm$, $AD = 3\ cm$ и $\measuredangle BCD = 45^\circ$.

5. Нацртај неколинеарне векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$, па затим конструиши вектор:
а) $2 \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$; б) $3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$.

6. Један унутрашњи угао трапеза је 65°, а један спољашњи 75°. Израчунај све унутрашње углове тог трапеза.

7. Две странице једнакокраког троугла су $6{,}5\ cm$ и $10\ cm$. Израчунај обим троугла одређеног врхом датог троугла и средиштима кракова.

Напредни ниво

8. Конструиши паралелограм *ABCD* ако је дијагонала $AC = 7cm$, а $\measuredangle BAC = 30^\circ$, $\measuredangle DAC = 45^\circ$.

9. Нацртај неколинеарне векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, па затим конструиши вектор:
а) $\vec{a} + 2 \cdot \vec{b} + 3 \cdot \vec{c}$; б) $2 \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b} - \vec{c}$.

10. Нека је *ABCD* (*AB*||*CD*) трапез и $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$. Нека су *M* и *N* средишта кракова *BC* и *DA* редом. Изрази вектор $\overrightarrow{MN}$ помоћу вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

11. Основица једнакокраког троугла је $20\ cm$, а обим је цео број центиметара. Израчунај најмању могућу вредност обима троугла одређеног средњим линијама тог троугла.

12. Обим правоуглог трапеза је $75\ cm$, а један његов угао је 30°. Ако је дужи крак $24\ cm$ израчунај дужину средње линије тог трапеза.

КОНТРОЛНА ВЕЖБА – 20 минута

Конструкција паралелограма. Вектори

1. Конструиши паралелограм *ABCD* ако се његове дијагонале $AC = 5cm$, $BD = 7cm$ [$AC = 6cm$, $BD = 4cm$] секу под углом од 45° [60°].

2. Нека је *ABCD* паралелограм и $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.Нека је *O* пресек дијагонала. Изрази вектор $\overrightarrow{AO}$ [$\overrightarrow{BO}$] помоћу вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Нацртај квадрат *ABCD*. Конструиши вектор $\vec{a} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = -2 \cdot \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ [$\vec{a} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$].

ЧЕТВРТИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

1. Реши једначину: $\left(-\frac{3}{4}\cdot x+0{,}4\right):\left(-\frac{2}{5}\right)=\ 5$ $\left[\left(-1{,}2\cdot x+\frac{7}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\ -2\right]$.

2. Збир два суседна угла једнакокраког [правоуглог] трапеза *ABCD* је 172º [135º]. Израчунај све углове тог трапеза.

3. Дате су странице троугла *ABC*: *AB* = 6 *cm*, *BC* = 5 *cm*, *CA* = 4 *cm* [*AB* = 7 *cm*, *BC*= 5 *cm*, *CA* = 6 *cm*]. Израчунај обим четвороугла ABA_1B_1 [троугла CA_1B_1] где су A_1 и B_1 редом средишта страница *BC* и *AC*.

4. Странице трапеза *ABCD* (*AB*||*CD*) су *AB* = 12 *cm*, *CD* = 10 *cm*, *BC* = *DA* = 8 *cm*. Тачке A_1, A_2, A_3 су на краку *AD* тако да је $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3D$. Праве паралелне *AB* које пролазе кроз тачке A_1, A_2, A_3 секу крак *BC* редом у тачкама B_1, B_2, B_3. Израчунај обим четвороугла ABB_1A_1 [A_3B_3CD].

5. Обим једнакокраког трапеза је 80 *cm* [50 *cm*]. Један крак је 15% обима. [Средња линија тог трапеза је 36% обима]. Израчунај дужину средње линије [крака] тог трапеза.

VII разред

КРУГ. СЛИЧНОСТ ТРОУГЛОВА

Основни ниво

1. Површина круга једнака је $900\pi\ cm^2$. Израчунај његов обим.

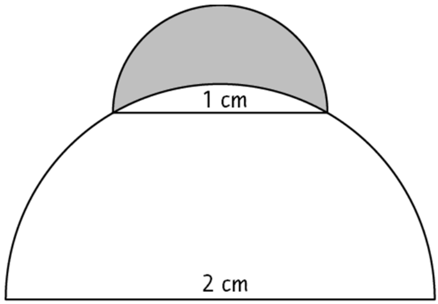
2. Колики је централни угао који одређују казаљке часовника у:
   а) 1 сат, б) 3 сата, в) 4 сата?

3. Један оштар угао правоуглог троугла *ABC* једнак је 38º, а један оштар угао правоуглог троугла *KLM* је 52º. Да ли су ови троуглови слични?

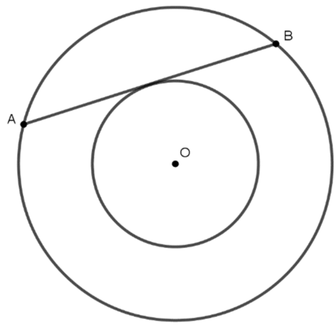
Средњи ниво

4. Одреди координате центра круга описаног око троугла *ABC*, ако је *A*(0,0), *B*(8,0) и *C*(0,6).

5. Дата су два полукруга, таква да део већег преклапа део мањег, као на слици. Израчунај обим осенчене фигуре.



6. Дате су две концентричне кружнице $k_1(O, 8cm)$ и $k_2(O, 17cm)$ и тетива *AB* кружнице већег полупречника, која додирује другу кружницу (види слику). Израчунај дужину тетиве.



7. Странице једног једнакокраког троугла су једнаке 10 *cm*, 10 *cm* и 16 *cm*. Израчунај обим њему сличног троугла чија је основица једнака 12 *cm*.

Напредни ниво

8. У квадрат странице $a = 10\,cm$ је уписана и око њега је описана кружница. Колика је површина одговарајућег кружног прстена одређеног овим кружницама?

9. Тачке *A*, *B* и *C* деле кружницу на три лука чије се дужине односе као $3 : 4 : 5$. Одреди највећи унутрашњи угао троугла *ABC*.

10. На папиру квадратног облика налази се срце које додирује ивице папира (види слику). Ана жели да изреже срце маказама и залепи га у свеску. Проценат дела папира који Ана треба да одстрани приближно је једнак:

а) 10%; б) 17%; в) 19%; г) 21%; д) 25%.

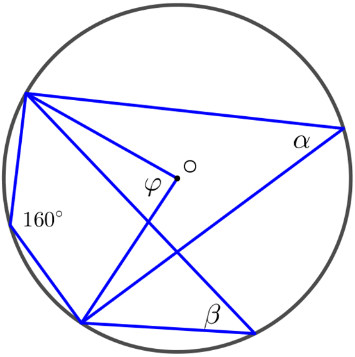
11. Два унутрашња угла троугла *ABC* су једнака 18º и 54º. Симетрала трећег унутрашњег угла дели тај троугао на два мања троугла. Докажи да је један од њих сличан троуглу *ABC*.

12. На страницама *AC* и *BC* троугла *ABC* дате су тачке *D* и *E*, такве да је *AD* = 7*cm*, *DC* = 8 *cm*, *EC* = 5 *cm* и *BE* = 19 *cm*. Докажи да су троуглови *DEC* и *ABC* слични.

КОНТРОЛНА ВЕЖБА

Круг

1. Одреди углове φ и α [φ и β] дате у кругу на слици.



2. Површина круга је $25\pi\ cm^2$. Израчунај обим круга чији је полупречник 20% краћи [дужи] од полупречника датог круга.

3. Око правоугаоника са страницама 24 *cm* и 10 *cm* описан је круг. Одреди обим [површину] тог круга.

4. Израчунај површину кружног прстена чија је ширина 2 *cm*, а полупречник мањег круга једнак 6 *cm* [10 *cm*].

5. Тетива *AB* круга *K*(O,12*cm*) једнака је 12*cm*. Израчунај површину мањег [већег] кружног исечка који одговара луку *AB*.

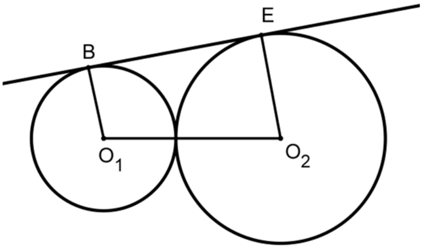
ЧЕТВРТИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

1. Израчунај обим и површину круга описаног око квадрата странице 10 *cm* [20 *cm*].

2. Који део кружнице представља њен кружни лук коме одговара централни угао од 150° [210°]?

3. Површина кружног исечка једнака је $\frac{\pi}{3}\ cm^2$ $\left[\frac{3\pi}{4}\ cm^2\right]$. Ако је пречник круга једнак $4\ cm$ $[9\ cm]$, колики је централни угао који одговара том исечку?

4. Израчунај дужину дужи коју одређују додирне тачке заједничке тангенте кругова који се додирују споља, приказаних на слици, ако је полупречник мањег круга једнак 7 *cm*, а већег 10 [9] *cm*.



5. Дужине страница троугла *ABC* су *AB* = 15 *cm*, *BC* = 10 *cm, AC* = 11 *cm*. Ако је дужина најкраће [најдуже] странице троугла $A_1B_1C_1$ једнака 4 *cm* [22,5 *cm*], одреди обим троугла $A_1B_1C_1$.

VIII разред

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ. ВАЉАК. КУПА, ЛОПТА

Основни ниво

1. Пречник основе ваљка је $8cm$ и дужина висине је $10cm$. Заокружи слова испред тачних одговора:

а) $V = 640\pi\ cm^3$, б) $V = 160\pi\ cm^3$, в) $V = 0{,}16\pi\ dm^3$,
г) $V = 640000\pi\ dm^3$, д) $V = \frac{160}{3}\ \pi\ cm^3$, ђ) $V = 160\ cm^3$.

2. Ако је површина основе праве купе $36\pi\ cm^2$ и дужина висине износи $8cm$, израчунај површину и запремину купе.

3. Обим великог круга лопте је $10\pi\ cm$. Израчунај површину и запремину лопте.

Средњи ниво

4. Реши системе једначина:

а)
$$4x-3y=8$$
$$x+2y=13$$

б)
$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{7}{12}$$
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{1}{3}$$

в)
$$(x+3):(y-1)=4:1$$
$$\frac{x-3}{y+1}=\frac{1}{2}$$

5. Колика је маса једнакостраничног (равностраног) ваљка чија је површина омотача $154cm^2$? ($\rho \approx 11{,}6\frac{g}{cm^3}, \pi \approx \frac{22}{7}$). Решење изрази у килограмима.

6. Одреди запремину купе уписане у коцку (основа купе је уписана у једну страну коцке и врх купе је у пресеку дијагонала наспрамне стране коцке), ако је запремина коцке $1\ dm^3$ ($\pi \approx 3$).

7. Површина полулопте је $108\pi\ cm^2$. Колика је запремина одговарајуће лопте?

Напредни ниво

8. а) Одреди вредност променљиве *m* тако да систем буде немогућ:

$$(m+5)x+8y=7$$
$$(m-2)x+3y=4$$

б) Одреди вредност променљиве *m* тако да систем буде неодређен:

$$2x+(2m-1)y=6$$
$$x+2y=3$$

9. Две различите лопте стоје на равној подлози и додирују се међусобно. Полупречник веће лопте је $4cm$, а пројекција њиховог централног растојања на равну подлогу износи $4\sqrt{3}cm$.
а) Одреди полупречник мање лопте.
б) Одреди удаљеност додирне тачке лопти од подлоге.

10. Основа праве призме је ромб странице $a = 4cm$ и угла $120°$. У ту призму уписан је највећи могући ваљак. Ако је висина призме једнака дужој дијагонали основе, израчунај разлику површина мањег дијагоналног пресека призме и осног пресека ваљка ($\sqrt{3} \approx 1{,}73$).

11. Основице једнакокраког трапеза су $24cm$ и $18cm$. Угао на већој основици је $45°$. Израчунај површину и запремину тела насталог ротацијом овог трапеза око: а) дуже основице; б) краће основице.

12. На ком растојању од врха купе, чија је висина H, треба поставити раван паралелно са основом која дели омотач купе на два дела једнаких површина?

КОНТРОЛНА ВЕЖБА

1. Површина осног пресека ваљка је $20cm^2$ [$40cm^2$] Ако је обим [површина] основе ваљка $5\pi\ cm$ [$\frac{25}{4}\pi\ cm$], одреди површину и запремину ваљка.

2. Који бројеви имају особину да им је збир 35 [разлика им је 6], а један од њих је $\frac{4}{3}$ другог [$\frac{6}{7}$ другог]?

3. Дужина катете је $10cm$ [$8cm$]. Дужина хипотенузе је за $2cm$ дужа од друге катете. Израчунај разлику површине тела која настаје ротацијом тог правоуглог троугла око краће катете и површине тела које настаје ротацијом око дуже катете.

4. Чаша има облик ваљка унутрашњег пречника $6cm$ [$4cm$] и висине $7cm$ [14cm]. Колико се таквих чаша може напунити са $1l$ воде? $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$

ЧЕТВРТИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

1. У ваљак, пречника основе 8cm, висине 10cm, уписана је и око њега описана правилна шестострана призма. Израчунај површину уписане призме [описане призме] и запремину описане [уписане] призме .

2. Реши систем једначина:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{4}&=\frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4}-\frac{y-3}{3}&=2y-11 \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} \frac{3x-2y}{5}-\frac{3y-5x}{3}&=x+1 \\ \frac{2x-3y}{3}-\frac{3y-4x}{2}&=y+1 \end{aligned}\right)$$

3. Пречник једне лопте је $15cm$ [17cm]. Полупречник друге лопте је за 35% већи [мањи] од полупречника прве лопте. За колико се разликују површине тих лопти?

4. Осни пресек купе је једнакостранични троугао, чији је обим $12cm$ [18cm]. Израчунај површину и запремину купе.

5. Израчунај површину и запремину ваљка, ако дијагонала осног пресека, дужине $8cm$, заклапа са висином ваљка угао од $60°$.

   [Израчунај површину и запремину ваљка, ако дијагонала осног пресека заклапа са висином ваљка угао од $60°$, при чему је дужина висине $4cm$.]

XXIII Јуниорска балканска математичка олимпијада

Ненад Вуловић, Крагујевац; Милош Ђорић, Београд

XXIII Јуниорска балканска математичка олимпијада (ЈБМО) одржана је у периоду од 20. до 25. јуна 2019. године у граду Аргос, Кипар.

На такмичењу је учествовало 16 екипа и то 10 званичних (Албанија, Бугарска, Босна и Херцеговина, Кипар, Грчка, Молдавија, Црна Гора, Румунија, Северна Македонија и Србија) и 6 гостујућих екипа (Азербејџан, Француска, Казахстан, Еквадор, Саудијска Арабија и Хрватска).

Екипа која је представљала Србију на Кипру на овом такмичењу изабрана је после пет нивоа селекције, закључно са Српском математичком олимпијадом. Чланови екипе Србије били су:

Александар Ђузовић, Математичка гимназија, Београд;
Миља Јовановић, Математичка гимназија, Београд;
Петар Марјановић, Математичка гимназија, Београд;
Злата Стефановић, Математичка гимназија, Београд;
Ања Милошевић, Математичка гимназија, Београд;
Матеја Вукелић, Математичка гимназија, Београд.

Лидер екипе био је др Ненад Вуловић, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина, а заменик лидера Милош Ђорић, Математички факултет, Универзитет у Београду.

Сви чланови екипе Србије успели су да освоје неку од медаља.
Границе бодова за медаље биле су:
златна медаља: 33 – 40 бодова;
сребрна медаља: 20 – 32 бодова;
бронзана медаља: 7 – 19 бодова.
Успех екипе Србије је следећи:

Име и презиме	Број бодова	Медаља
Матеја Вукелић	33	златна
Александар Ђузовић	21	сребрна
Злата Стефановић	20	сребрна
Миља Јовановић	15	бронзана
Петар Марјановић	15	бронзана
Ања Милошевић	10	бронзана

Екипа Србије је освојила, у генералном пласману, четврто место са освојених 114 бодова.

Овом приликом још једанпут честитамо свим члановима екипе на великом успеху. Наредна XXIV Јуниорска балканска математичка олимијада одржаће се крајем јуна 2020. године.

Екипа Србије

Задаци

1. Одредити све просте бројеве p такве да постоје природни бројеви x, y, z такви да је број

$$x^p + y^p + z^p - x - y - z$$

производ тачно три различита проста броја.

2. Нека су a, b два различита цела броја и c позитиван реалан број такви да важи

$$a^4 - 2019a = b^4 - 2019b = c.$$

Доказати да важи $-\sqrt{c} < ab < 0$.

3. У троуглу ABC у коме важи $AB < AC$ симетрала странице BC сече праве AB и AC редом у тачкама P и Q. Нека је H ортоцентар троугла ABC, а M и N средишта дужи BC и PQ, редом. Доказати да се праве HM и AH секу на кружници описаној око троугла ABC.

4. Табла 5×100 је подељена на 500 јединичних поља, од којих је n обојено црном бојом, док су остала поља беле боје. Два јединична поља табле су суседна уколико имају заједничку страницу. Уколико свако поље дате табле има највише два црна суседна поља, одредити највећу могућу вредност за n.

Решења

1. Приметимо да прости бројеви $2,3,5$ јесу решења задатка јер за (x,y,z) можемо редом узети тројке $(1,1,6),(1,2,3),(1,1,2)$ јер је у сва три случаја вредност датог израза $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Доказаћемо да су то и једина решења. Нека је на даље $p > 5$. Према малој Фермаовој теореми имамо

$$x^p - x \equiv 0 \pmod p), \qquad x^p - x \equiv 0 \pmod 2), \qquad x^p - x \equiv 0 \pmod 3),$$

(слично за y и z), одакле је

$$x^p + y^p + z^p - x - y - z \equiv 0 \quad (mod\ 6p).$$

Из услова задатка сада следи да мора бити

$$x^p + y^p + z^p - x - y - z = 6p.$$

Како је бар један од бројева x,y,z већи од 1, рецимо $x \geq 2$, то је

$$x^p + y^p + z^p - x - y - z \geq x^p - x = x(x^{p-1} - 1) \geq 2(2^{p-1} - 1) = 2^p - 2.$$

Међутим, за $p \geq 7$ важи

$$2^p - 2 > 6p$$

(ова неједнакост се најлакше показује математичком индукцијом).

Дакле, $6p = 2 \cdot 3 \cdot p$ је прави делилац броја $x^p + y^p + z^p - x - y - z$ за $p > 5$, па овај број у том случају не може бити производ тачно три различита проста броја.

Напомена. Математичка индукција није у званичном програму такмичења ученика основних школа у нашој земљи, али јесте у програму за ЈСМО и ЈБМО. Процена $2^p - 2 > 6p$ за $p \geq 7$ се може добити наравно и без коришћења математичке индукције.

2. Одузимањем датих једнакости добијамо да је

$$2019(a-b) = a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2),$$

одакле, користећи услов $a \neq b$, добијамо да важи

$$(a+b)(a^2+b^2) = 2019.$$

Специјално, важи $a + b > 0$. Сабирањем датих једнакости добијамо

$$2c = (a^4 + b^4) - 2019(a + b) = a^4 + b^4 - (a^2 + b^2)(a + b)^2 =$$
$$= -2ab(a^2 + ab + b^2) > 0.$$

Како је, због $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a + b \neq 0$,

$$a^2 + ab + b^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + (a + b)^2) > 0,$$

доказ неједнакости $ab < 0$ је завршен. Приметимо даље да је

$$a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2 - ab > -ab,$$

па је

$$-c = ab(a^2 + ab + b^2) < -(ab)^2,$$

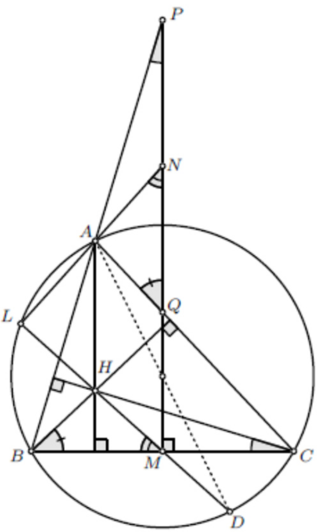
одакле је $(ab)^2 < c$ и $-\sqrt{c} < ab < \sqrt{c}$. Овим је и доказ друге неједнакости завршен.

3. Очигледно имамо да важи

$$\measuredangle APQ = \measuredangle BPM = 90° - \measuredangle MBP = 90° - \measuredangle CBA = \measuredangle HCB,$$
$$\measuredangle AQP = \measuredangle MQC = 90° - \measuredangle QCM = 90° - \measuredangle ACB = \measuredangle CBH,$$

одакле следи сличност троуглова APQ и HCB. Како су M и N редом средишта страница BC и PQ, троуглови AQN и HBM су такође слични. Према томе, важи

$$\measuredangle ANQ = \measuredangle HMB.$$



Означимо са L пресечну тачку правих AN и HM. Тада је

$$\measuredangle MLN = 180° - \measuredangle LNM - \measuredangle NML =$$
$$= 180° - \measuredangle LMB - \measuredangle NML =$$
$$= 180° - \measuredangle NMB = 90°.$$

Нека је D тачка на описаној кружници троугла ABC дијаметрално супротна са A. Познато је да је M средиште дужи HM, па су тачке L, H, M, D колинеарне и важи

$$\measuredangle DLA = \measuredangle MLA = \measuredangle MLN = 90°.$$

Како је и $\measuredangle DLA = 90°$, добијамо да тачка L припада кружници описаној око троугла ABC.

4. За свако поље дате табле посматрајмо број црних поља која су суседна том пољу. Означимо са S укупан број таквих суседа за свих 500 поља. На основу услова задатка, имамо да је

$$S \leq 500 \cdot 2 = 1000.$$

Свако црно поље које се налази у неком од ћошкова табле је суседно са тачно два поља табле и самим тим доприноси са 2 у суми S. Црна поља која се налазе на граници дате табле, а нису ћошкови, имају тачно три суседна поља, па доприносе са 3 у суми S. Црна поља која се налазе у унутрашњости дате табле имају тачно четири суседна поља, па доприносе са 4 у суми S. Означимо бројеве тих црних поља редом са a, b, c. На основу претходних разматрања, имамо да је

$$S = 2a + 3b + 4c, \qquad a \leq 4,\ b \leq 202,\ c \leq 294.$$

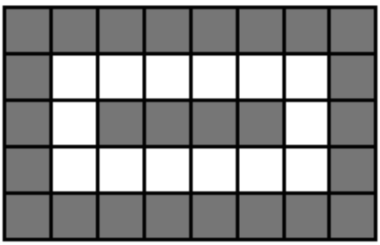
Потребно је, при овим условима, одредити највећу могућу вредност израза

$$n = a + b + c.$$

Приметимо да уколико повећамо a за 1, а c смањимо за 1, збир $a + b + c$ не мења вредност, док се сума S смањује за 2. Слично, уколико повећамо b за 1, а c смањимо за 1, збир $a + b + c$ не мења вредност, док се сума S смањује за 1. Према томе, највећа вредност збира $a + b + c$ се постиже када су a и b највећи могући, а то је $a = 4, b = 202$. Тада је $4c \leq 1000 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 202$, односно $c \leq 96$, па је

$$n \leq 4 + 202 + 96 = 302.$$

Остаје још да покажемо да постоји бојење табле за које је $n = 302$. Уколико обојимо сва ивична поља табле у црно, добијамо $a = 4, b = 202$. Остаје још да обојимо $c = 96$ поља у средњем реду таблице у црно, без поља у првој и последњој колони (која су већ црна јер су ивична) и другој и претпоследњој колони (која остају бела). Овим је доказ завршен.



Напомена. Може се лако показати да је бојење при коме се постиже $n = 302$ јединствено.

ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ

Одабрани задаци служе за вежбу и припрему за такмичења. Препоручују се ученицима као корак који претходи решавању конкурсних задатака. Решења која следе искористити за проверу сопствених.

За ученике III разреда

3251. Доврши уписивање бројева у празна поља тако да производ свака три узастопна броја буде 30.

			5										3		

3252. Стојан имао 825 динара. За $\frac{1}{3}$ новца је купио слаткише, а $\frac{1}{5}$ новца је позајмио сестри. Колико је Стојан потрошио на слаткише, колико је позајмио сестри а колико му је остало новца?

За ученике IV разреда

3253. Сатенске траке се пакују у ролне од по 15*m*. Колико је најмање тих паковања потребно да би се 16 марама облика троугла чије су странице 1*m*, 80*cm* и 80*cm* обрубило том траком (да би се трака ушила по ивицама марама)?

3254. Драгана је капут, дукс и ципеле платила 16100 динара. Капут је платила 7400 динара више од дукса, а дукс и капут 7100 динара више од ципела. Колико је платила капут, колико дукс, а колико ципеле?

За ученике V разреда

3255. Израчунај аритметичку средину првих 1000 природних бројева који при дељењу са 14 дају остатак 6.

3256. Показажи да међу 15 произвољних природних бројева морају постојати два чија је разлика дељива са 14.

За ученике VI разреда

3257. Колико литара дестиловане воде треба помешати са 4 литра 5% раствора алкохола да би се добио 1% раствор?

3258. Средишта страница и подножје једне висине разностраничног троугла су темена једнакокраког трапеза. Докажи.

За ученике VII разреда

3259. Одреди све целе бројеве x и y такве да је $x^2 + y^4 = 2x$.

3260. Одреди површину трапеза *ABCD* чије су основице *AB* =18*cm* и *CD* = 9*cm*, а краци *BC* = 6*cm* и *AD* = 5*cm*.

За ученике VIII разреда

3261. Тачке M, N, P су средишта три међусобно мимоилазне ивице коцке (никоје две ивице се не секу и нису паралелне). Израчунај површину троугла MNP ако је дужина ивице коцке 4.

3262. У једном разреду има n ученика, међу којима k учи енглески језик, а l француски језик. Могуће је да неки ученици не уче ниједан од ова два језика. Колико најмање ученика учи оба језика (у зависности од n, k, l)?

РЕШЕЊА ОДАБРАНИХ ЗАДАТАКА 3251 – 3262.

3251. Пошто је $5 \cdot 6 = 30$ тада поља треба попуњавати чиниоцима броја 6 а то су или 2 и 3 или 1 и 6. Када би попуњавали поља бројевима 5, 6 и 1 не би нам се уклопио број 3 који се већ налази у пољу. Једина могућност је да попунимо поља са бројевима 5, 3, и 2 и то на овај начин:

5	3	2	**5**	3	2	5	3	2	5	3	2	5	**3**	2	5

3252. $\frac{1}{3}$ од 825 је 825:3 = 275; 275 динара је Стојан потрошио на слаткише.

$\frac{1}{5}$ од 825 је 825:5 = 165; 165 динара је Стојан позајмио сестри.

Остало му је 825 – 275 – 165 = 550 – 165 = 385 динара.

3253. Нека је број ролни x. Тада је $1500 \cdot x \geq 16 \cdot (100 + 80 + 80)$, $1500 \cdot x \geq 16 \cdot 260$, $1500 \cdot x \geq 4160$, $x \geq 4160 : 1500$. Пошто је $x > 2$, значи да су потребна најмање 3 паковања сатенске траке.

3254. Ако цену ципела означимо са *c*, цену дукса са *d*, а цену капута са *k*, тада је *d* + *k* = 7100 + *c*, а *k* + *d* + *c* = 16100, па је 7100 + *c* + *c* = 16100, 2*c* = 9000, *c* = 4500. То значи да је *d* + *k* = 7100 + 4500, *d* + *k* = 11600. Пошто је *k* = 7400 + *d*, значи да је 7400 + *d* + *d* = 11600, па је 2*d* = 4200, а *d* = 2100. Тада је *k* + 2100 + 4500 = 16100, па је *k* + 6600 = 16100, *k* = 9500. Драгана је ципеле платила 4500 динара, дукс 2100 динара, а капут 9500 динара.

3255. Првих 1000 природних бројева који при дељењу са 14 дају остатак 6 су: $6,20,34,\ldots,13992$ (последњи смо добили рачунајући $6+999\cdot 14=13992$). Уочимо да је збир првог и последњег једнак збиру другог и предпоследњег и тако даље, јер се увек први сабирак повећа за 14, а други смањи за 14. Такође, $6+13992 = \frac{6+13992}{2}+\frac{6+13992}{2}=6999+6999$, па се сабирањем посматраних 1000 бројева добија исти збир као сабирањем 1000 бројева од којих је сваки једнак броју 6999, из чега следи да је тражена аритметичка средина једнака 6999.

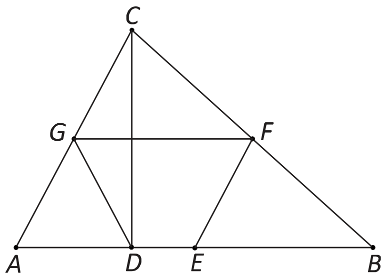
3256. У решењу овог задатка ћемо користити следеће својство:

Ако су a и b два природна броја који имају исти остатак при дељењу природним бројем d онда се бројеви a и b разликују за број који је дељив са d.

При дељењу са 14 остаци могу бити само неки од бројева 0,1,...,13, дакле њих 14, па нека два од 15 посматраних бројева морају имати исте остатке при дељењу са 14. Разлика та два броја је дељива са 14.

3257. С обзиром да је $4\cdot 5\% = 0{,}2$ значи да у 4 литре 5% раствора алкохола има 2*dl* алкохола и 3,8 литара воде. Ако са *x* обележимо тражену количину дестиловане воде тада је (4+*x*)$\cdot$ 1% = 0,2, односно 4+*x* = 20, па је *x* = 16. Дакле, треба 16 литара дестиловане воде помешати са датим раствором.

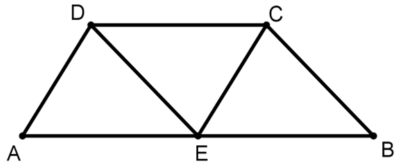
3258. Тачке *D*, *E*, *F* и *G* су редом подножје висине из темена *C* и средишта страница *AB*, *BC*, *CA* троугла *ABC*. Нека за троугао *ABC* важи да је *BC* > *AC*. Тада важи распоред тачака *A*-*D*-*E*-*B*. Види слику!



Дуж *FG* је средња линија троугла, па је паралелна са *AB*, односно *DE*. Дакле четвороугао *DEFG* је трапез. Тачка *G* је средиште хипотенузе *AC* правоуглог троугла *ADC*, па је центар кружнице описане око тог троугла. Следи да је дуж *DG* једнака полупречнику те кружнице, половини *AC*. Дуж *EF* је средња линија троугла, па је једнака половини странице *AC*. Дакле, *DG* = *E F* = $\frac{1}{2}\cdot$ *AC*, па је трапез *DEFG* једнакокрак.

3259. Једначина $x^2 + y^4 = 2x$ еквивалентна је једначини $x^2 - 2x + 1 + y^4 = 1$, односно $(x-1)^2 + y^4 = 1$. То је могуће једино ако је $(x-1)^2 = 1$ и $y^4 = 0$ или $(x-1)^2 = 0$ и $y^4 = 1$. Из првог случаја се добијају парови решења $(x,y) = (0,0)$ и $(x,y) = (2,0)$, а из другог $(x,y) = (1,1)$ и $(x,y) = (1,-1)$.

3260. Нека је *E* тачка странице *AB* таква да је *AE* = *EB* = 9 cm. Види слику!



Тада је $EC \parallel AD$ и $ED \parallel BC$, па су троуглови *AED*, *EBC* и *CDE* међусобно подударни, сва три са страницама дужина 5 cm, 6 cm и 9 cm. Површина трапеза једнака је трострукој вредности површине једног од та три троугла. Како су нам познате све три странице троугла, за рачунање његове површине користићемо Херонов образац, па је површина трапеза једнака

$$P = 3\sqrt{10(10-9)(10-5)(10-6)} = 3 \cdot \sqrt{200} = 30\sqrt{2}\, cm^2.$$

3261. Нека су, без умањења општости, M, N, P средишта ивица AA_1, BC, C_1D_1. Овај троугао је једнакостраничан јер су све ивице исте дужине. Израчунаћемо дужину дужи MN, на исти начин би се добиле дужине дужи NP и MP. Како је права AA_1 нормална на равни $ABCD$, троугао AMN је правоугли са катетама $AM = 2$ и $AN = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$, па је

$$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Површина троугла MNP је

$$\frac{24\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$$

3262. Нека x ученика учи само енглески језик, y ученика само француски, z ученика уче оба језика и t ученика не учи ниједан од језика. Тада је

$$\begin{aligned} k &= x + z, \\ l &= y + z, \\ n &= x + y + y + t. \end{aligned}$$

Ако од збира прва две једначине одузмемо трећу једначину, добијамо

$$z = k + l + t - n \geq k + l - n.$$

Према томе, уколико је $k + l > n$, одговор је $z_{min} = k + l - n$ и постиже се када је $t = 0$. У супротном је одговор $z_{min} = 0$ и постиже се када је $x = k$, $y = l$.

КОНКУРСНИ ЗАДАЦИ

Конкурсни задаци намењени су првенствено ученицима који се у већој мери интересују за математику. Истовремено то је својеврсно такмичење које Математички лист организује сваке школске године. Решења задатака са именима решавалаца објављују се у наредним бројевима часописа. Предност имају они решаваоци који у првих 20 дана по изласку броја из штампе пошаљу исправна решења. Имена решавалаца са бар шест тачних решења објављују се у првом броју следеће школске године. За најбоље решаваоце предвиђене су награде. Упутство за слање решења налази се на страни 48.

За ученике III разреда

2809. Доврши уписивање бројева у празна поља тако да производ свака три узастопна броја буде 750.

	75														5	

2810. Милан је $\frac{1}{4}$ своје уштеђевине дао за чоколаду која је коштала 238 динара. Ако је Милан дао $\frac{1}{7}$ своје уштеђевине за свеску, колико је коштала свеска?

За ученике IV разреда

2811. Колико се највише столњака облика правоугаоника чије су димензије 180*cm* и 140*cm* може обрубити украсном траком дужине 80*m*?

2812. Мајстор Радован уводи централно грејање, а наплаћује тако да за свој рад узме половину цене потрошеног материјала и за сваки дан рада дода још по 1700 динара. Колико је господин Јовић платио мајстора Радована, а колико материјал, ако је укупни рачун био 33480 динара, а посао је био завршен за 3 дана?

За ученике V разреда

2813. Одреди природан број n такав да је аритметичка средина првих n природних бројева који при дељењу са 23 дају остатак 19 једнака 2020.

2814. Показати да сваки скуп који садржи 20 природних бројева има подскуп чији је збир елемената дељив са 19. (Напомена: Збир елемената једночланог скупа је сам тај елемент.)

За ученике VI разреда

2815. Колико литара дестиловане воде треба помешати са 5 литра 4% раствора алкохола и 5 литара 2% раствора алкохола да би се добио 0,5% раствор?

2816. Тачке *D*, *E* и F су редом подножје висине из темена правог угла *C* и средишта катета *AC* и *BC* троугла *ABC*. Докажи да тачке *C*, *D*, *E* и *F* припадају једној кружници.

За ученике VII разреда

2817. Одреди све целе бројеве x и y такве да је $x^2 + y^2 = 2y - 2x - 1$.

2818. Дужине страница троугла су 13 *cm*, 40 *cm* и 45 *cm*. Одреди дужину најдуже висине у овом троуглу.

За ученике VIII разреда

2819. Странице квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ су $AB = 3$, $BC = 1$, $CC_1 = 2$. Нека је M средиште ивице B_1C_1. Одреди запремину четворостране пирамиде BCD_1A_1M, чија је основа BCD_1A_1 и врх M.

2820. У разреду има 20 дечака. Међу њима 14 има смеђе очи, 15 смеђу косу, 17 има више од 60*kg* и 18 има више од 165*cm*. Докажи да барем четворица дечака имају све наведене особине.

РЕШЕЊА КОНКУРСНИХ ЗАДАТАКА 2797 – 2808.

2797. Одреди збир првих 30 узастопних непарних природних бројева.
Решење. Низ првих 30 непарних природних бројева је $1, 3, 5, 7, \dots, 55, 57, 59$. Тада збир формирамо здруживањем:

$$(1+59) + (3+57) + (5+55) + (7+53) + (9+51) + \cdots + (29+31) = \\ = 15 \cdot 60 = 900.$$

Постоји 15 парова чији је збир 60.

Вера Костић, III3, ОШ „Бошко Ђуричић“, Јагодина

2798. Реши магични квадрат:
Решење. Карактеристичан збир је три пута већи од средишњег бројау таблици. Карактеристичан збир је $142 \cdot 3 = 426$.

105		127
	142	

105	**194**	**127**	**426**
164	**142**	**120**	**426**
157	**90**	**179**	**426**

426 **426** **426** **426** **426**

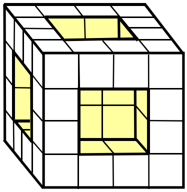
Милош Галоња, III1, ОШ „Здравко Челар“, Челарево

2799. Неки број је требало поделити са 24, а грешком је подељен са 14 и добијен је број 72. Колики би био количник да није било грешке?

Решење. Пре него што је подељен са 14, број је био 72 · 14 = 1008. Тај број је требало поделити са 24 и количник би био 1008 : 24= 42.

Милица Тошић, IV_3, ОШ „Љуба Нешић", Зајечар

2800. Површина једне коцкице је 96*cm*². Од 40 таквих једнаких коцкица састављена је фигура на цртежу. Прво је 64 коцкица сложено у велику коцку, а онда су на свакој страни коцке из средине извађене по 4 коцкице. Израчунај површину тако настале фигуре.

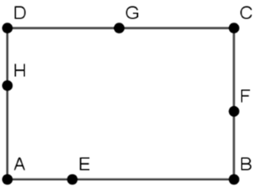


Решење. Ако је површина једне коцкице 96*cm*², онда је површина једне њене стране 16*cm*² (јер је 96 : 6 = 16), а њена ивица је 4*cm*. То значи да је ивица велике коцке16*cm*, а површина је 1536*cm*² (јер је P = 6 · 16 · 16).
Кад су из средине сваке стране велике коцке извађене по 4 коцкице, површина се повећала за 6 · 8 · 16*cm*². Пошто је 1536 + 6 · 8 · 16 = 2304, површина фигуре на цртежу је 2304*cm*².

Хана Алимпић, IV_1, ОШ „Николај Велимировић", Шабац

2801. Дат је правоугаоник $ABCD$ и тачке E, F, G, H такве да $A - E - B, B - F - C$, $C - G - D$ и $D - H - A$. Колико има троуглова чија темена припадају скупу $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$?

Решење. За три темена троугла имамо тачно четири могућности:



1° Два темена припадају скупу $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, E\}$ и једно теме припада скупу $\{C, D, F, G, H\}$;

2° Два темена припадају скупу $\{C, D, G\}$ и једно теме припада скупу $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, E, F, H\}$.

3° Два темена су F и H и једно теме припада скупу $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, E, C, G, D\}$.

4° Једно теме припада скупу $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, E\}$, једно теме припада скупу $\{F, H\}$ и једно теме припада скупу $\{C, D, G\}$, при чему три темена нису A, H, D или B, F, C.
Слично као и у одабраном добијамо да је укупан број троуглова

$$3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 6 + (3 \cdot 2 \cdot 3 - 2) = 52.$$

Урош Бабић, V_2, ОШ „Николај Велимировић", Шабац

2802. Израчунај: а) $\frac{3}{1\cdot4}+\frac{3}{4\cdot7}+\cdots+\frac{3}{2017\cdot2020}$ б) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots+\frac{1}{2017\cdot2020}$.

Решење. а) Треба приметити да је за свака два природна broj n и k тачно

$$\frac{k}{n\cdot(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}$$

Тако добијамо:

$$\frac{3}{1\cdot4}+\frac{3}{4\cdot7}+\frac{3}{7\cdot10}+\cdots+\frac{3}{2017\cdot2020}=$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2020}$$

Па на исти начин као код одабраног задатка закључујемо да је добијени израз једнак $\frac{1}{1}-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020}$.

б) Приметимо да је сваки сабирак посматраног збира три пута мањи од одговарјућег сабирка збира из а), на основу чега закључујемо да је он три пута мањи од збира из а), тј. он је једнак $\frac{2019}{2020}:3=\frac{673}{2020}$.

Арсен Пантић, V_2, ОШ „Жарко Зрењанин”, Нови **Сад**

2803. Двоцифрени број $\overline{x5}$ је три пута већи од производа својих цифара. Колико делилаца има тај број?

Решење. Двоцифрени број $\overline{x5}$ записујемо $x\cdot10+5$, па је по услову задатка $x\cdot10+5=3\cdot x\cdot5$. Даље је $10\cdot x+5=15\cdot x$, односно $5=5\cdot x$, па је $x=1$. Да би одредили број делилаца број 15 раставимо на просте чиниоце, $15=3\cdot5$. Број 15 има 4 делиоца.

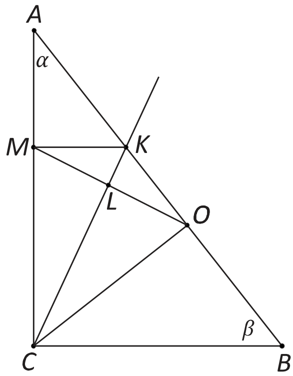
Јадранка Стаменковић,VI_1, ОШ „Бата Булић”, Петровац на Млави

2804. Нека је тачка *О* пресек нормале из темена *С* правог угла и хипотенузе *АВ* правоуглог троугла *АВС*. Симетрала угла *АСО* сече *АВ* у тачки *К*. Нормала из *К* на *АС* сече *АС* у тачки *М*. Израчунај угао између правих *СК* и *ОМ*.

Решење. Нека је $\sphericalangle CAB=\alpha$, а $\sphericalangle ABC=\beta$. Углови α и β су комплементни, тј. $\alpha+\beta=90°$. У правоуглом троуглу ΔACO угао $\sphericalangle ACO=90°-\alpha=\beta$. Пошто симетрала угла $\sphericalangle ACO$ дели тај угао на два једнака угла, угао $\sphericalangle ACK=\sphericalangle KCO=\frac{\beta}{2}$. С обзиром да је: *СК* = *СК* (заједничка страница), $\sphericalangle MCK=\sphericalangle OCK=\frac{\beta}{2}$ и $\sphericalangle MKC=\sphericalangle OKC=90°-\frac{\beta}{2}$ следи по ставу *УСУ* да је $\Delta MCK\cong\Delta OCK$, па је *МС* = *СО.*

За троуглове *MCL* и *LCO* важи: *CL* = *CL* (заједничка страница), *МС* = *СО* (из претходне подударности) то по ставу *СУС* следи њихова подударност , односно

$\sphericalangle CLM = \sphericalangle CLO = x$. Следи да је $\sphericalangle MCL = \sphericalangle OCL = \frac{\beta}{2}$, односно $2x = 180°$, па је $x = 90°$. Тражени угао између правих *СК* и *ОМ* је $90°$.



Растко Илић, VI₁, ОШ „Горан Остојић" , Јагодина

2805. Одреди све троцифрене природне бројеве $\overline{abc}$ за које важи $\overline{abc} = \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc}$. Истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима одговарају различите цифре.

Решење. Цифре a, b и c су различите: $a \neq b \neq c$ и $\overline{abc} = \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc}$. Дакле, $100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$, односно $89a = 10c + b$. Важи да је $0 < 89a = 10c + b \leq 99$, па следи да је $a = 1$. Из $89 = 10c + b$ закључујемо да је $b = 9$ и $c = 8$. Нема других решења јер већ за $c = 7$ следи да је $b = 19$, што је немогуће. Дакле , постоји само један такав број 198.

Павле Ивановић, VII5, ОШ „Доситеј Обрадовић'', Крушевац

2806. Да ли постоје конвексни многоуглови код којих је број дијагонала једнак потпуном квадрату неког природног броја?

Решење. Код таквих многоуглова би морало бити испуњено $\frac{n(n-3)}{2} = k^2$, за неки природан број k. Односно, важило би $n(n-3) = 2k^2$. Ако је $n = 2k$ и $n - 3 = k$, тада за $k = 3$ и $n = 6$ добијамо да је правилан шестоугао један многоугао са тим својством, јер је његов број дијагонала једнак $9 = 3^2$.

Софија Чебашек, VIIa, Математичка гимназија, Београд

2807. Концерт је почео измеу 18 и 19 часова, а завршио се између 21 и 22 часа. Одредити колико дуго је трајао коцерт, ако су минутна и сатна казаљка за то време замениле места.

Решење. Нека је концерт почео у 18 часова и x минута, а завршио се у 21 час и y минута. На основу Одабраног задатка, изједначавајући положај мале казаљке на почетку и велике казаљке на крају концерта добијамо једначину

$$\frac{x}{2} = 6y - 180,$$

док из једнакости положаја велике казаљке на почетку и мале казаљке на крају концерта добијамо једначину

$$\frac{y}{2} = 6x - 270.$$

Решавањем овог система добијамо да је $x = 47\frac{119}{143}$, а $y = 33\frac{141}{143}$ минута. Према томе, концерт је трајао 2 сата и $46\frac{2}{13}$ минута.

Милица Крстић, $VIII_5$, ОШ „8. септембар”, Пирот

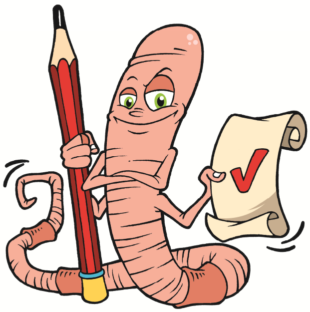
2808.Катета AC правоуглог троугла ABC, са правим углом код темена C, припада равни α, а раван троугла ABC и раван α образују диедар са углом од $45°$. Ако је $AC = 2, AB: BC = 3: 1$, израчунати растојање тачке B од равни α.

Решење. Из услова задатка $AC = 2, AB: BC = 3: 1$, се коришћењем Питагорине теореме лако добија $AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Нека је D подножје нормале из тачке B на раван α. Тада је $BD \perp CD$ и $AC \perp BC$, па је на основу Теореме о три нормале и $AC \perp CD$. Према томе, угао диедра одређеног равнима троугла ABC и α је заправо угао између правих BC и CD, па је $\measuredangle BCD = 45°$. Самим тим је троугао BCD једнакокрако-правоугли, са хипотенузом $BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па је дужина катете $BD = \frac{1}{2}$.

Исидора Перуничић, $VIII_1$, гимназија „J.J. Змај”, Нови Сад

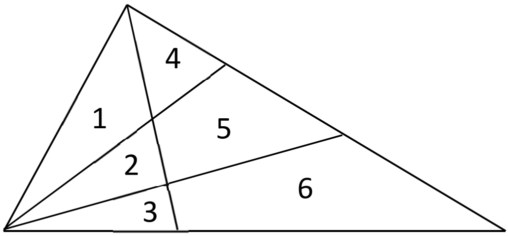
НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Ова рубрика је, као и конкурсни задаци, позив свим нашим читаоцима за такмичење. У сваком броју нашег листа дајемо један задатак за сваки разред. Из сваког разреда, пет најуспешнијих решавалаца биће награђено. Упутство за слање решења налази се на страни 48.



Наградни задатак бр. 597 (за ученике III разреда)

Колико има троуглова на слици? Напиши који су то троуглови.



Наградни задатак бр. 598 (за ученике IV разреда)
Бака дели бомбоне унуцима. Ако сваком да 4 бомбоне, остаће јој 2. Ако сваком да 5 бомбона, недостајаће једна. Колико има бомбона, а колико унука?

Наградни задатак бр. 599 (за ученике V разреда)
Бројеви 1,2,3,4,5,6,7,8 су подељени у три групе. Показажи да ће производ бројева из бар једне од те три групе бити већи од 34.

Наградни задатак бр. 600 (за ученике VI разреда)
Дате су неколинеарне тачке *D*, *E* и *F*. Конструиши троугао *ABC* ако су *D*, *E* и *F* редом подножје висине из темена *C* и средишта страница *AC* и *BC*.

Наградни задатак бр. 601 (за ученике VII разреда)
Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 - y^2 = 2019$?

Наградни задатак бр. 602 (за ученике VIII разреда)
Свака тачка у унутрашњости и свака тачка на страницама јединичног квадрата обојена је једном од две боје. Докажи да увек постоје две тачке обојене истом бојом чије је међусобно растојање бар $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 591 (МЛ LIV-3)

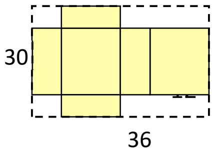
Решење. А = 1 и Б = 9

$$\begin{array}{r} 1 \\ 9\ 9 \\ 9\ 1 \\ \hline 1\ 9\ 1 \end{array}$$

Награђени

Андрија Стевановић, III4, ОШ „Јован Стерија Поповић“, Вршац
Дуња Симић, III1, ОШ „Десанка Максимовић“, Ваљево
Вук Петковић, III4, ОШ „Димитрије Тодоровић Каплар“, Књажевац
Огњен Бајић, III1, ОШ „Лаза К. Лазаревић“, Шабац
Никола Павловић, III1, ОШ „Мома Станојловић“, Крагујевац

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 592 (МЛ LIV-3)



Решење. Пошто је $2 \cdot (12 \cdot 18 + 12 \cdot 6 + 18 \cdot 6) = 792$, површина кутије је $792cm^2$. Сви украсни папири су квадрати чије су површине веће од површине кутије, а странице тих квадрата су $3dm$, $4dm$ и $5dm$. Из мреже квадра види се да украсни папир мора имати странице веће од $30cm$ ($3dm$).

То значи да Милан не може употребити украсни папир површине $9dm^2$. Како је $16dm^2 = 1600cm^2$ и $1600cm^2 - 792cm^2 = 808cm^2$, а $25dm^2 = 2500cm^2$ и $2500cm^2 - 792cm^2 = 1708cm^2$, значи да Милан треба да употреби папир површине $16dm^2$.

Награђени

Матеја Бабић, IV_1, ОШ „Посавски партизани", Обреновац
Ђорђе Добросављевић, IV_1, ОШ „Деспот Стефан Високи", Деспотовац
Јана Петровић, IV_1, ОШ „8. септембар" Пирот

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 593 (МЛ LIV-3)

Решење. Треба посматрати проблем уназад, тј. како од 200 доћи до 0 користећи операције дељењем са 3 и одузимањем 1, при чему се тражи да се примени минимални број операција. Тако долазимо до низа:

200[-1], 199[-1], 198[:3], 66[:3], 22[-1], 21[:3], 7[-1], 6[:3], 2[-1], 1[-1], 0,

односно

0[+1], 1[+1], 2[· 3], 6[+1], 7[· 3], 21[+1], 22[· 3] ,66[· 3], 198[+1], 199[+1], 200

са тастерима [+1] и [· 3]. Дакле, потребно је најмање 10 притисака на тастер.

Награђени

Саид Колашинац, V_1, ОШ „Светозар Марковић”, Сјеница
Љубица Лазић, V_2, ОШ „Вера Радосављевић”, Неготин
Анка Милићевић, V_2, ОШ„Стеван Јаковљевић”, Параћин
Лима Андреев, V_2, ОШ „Светозар Марковић”, Београд
Андреј Јовић, V_1, ОШ „Бранко Радичевић ”, Врање

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 594 (МЛ LIV-3)

Решење. Нека Пера станује на спрату $x+1$. Тада је број његовог стана $10x+y$ где је $0 \le y \le 9$. Број Олгиног стана је $x+1$. Тада је $11x+y+1=239$, $11x+y=238$. С обзиром да је $0 \le y \le 9$,решење је $y=7$, $x=21$. Перин број стана је 217.

Награђени

Тадија Вељковић, VI5, ОШ „Стефан Немања“, Ниш
Милош Добросављевић, VI2, ОШ „Деспот Стефан Високи", Деспотовац
Јадранка Стаменковић, VI1, ОШ „Бата Булић“, Петровац на Млави
Нађа Радовановић, VI3, ОШ „Вук Караџић “, Књажевац
Анђела Гордић, VI1, ОШ „ Гојко Друловић “, Радоиња

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 595 (МЛ LIV-3)

Решење. Делиоци броја 2^4 су 1, 2, 2^2, 2^3 и 2^4, дакле њих укупно 5. На сличан начин закључујемо да делилаца броја 3^3 има 4, делилаца броја 5^2 има 3 и делилаца броја 7 има 2.
Сви делиоци броја $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1$ се могу представити као производ неких од делилаца бројева 2^4, 3^3, 5^2 и 7, па заљкучујемо да их укупно има укупно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. Делилаца који су квадрати природних бројева има дванаест и то су: 1, 2^2, $2^4=4^2$, 3^2, 5^2, 6^2, 10^2, 12^2, 15^2, 20^2, 30^2, 60^2.

Награђени

Игор Цветковић, VII1, ОШ „Његош", Ниш
Тамара Сатарић, VII3, ОШ „Бранко Радичевић", Нови Београд
Ирена Марковић, VII2, ОШ „Ратко Митровић", Нови Београд
Мина Симић, VII1, Ваљевска гимназија, Ваљево
Николина Глигорић, VII3 , ОШ „Петар Тасић", Лешница

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 596 (МЛ LIV-3)

Решење. Дати израз се лако траснформише до збира квадрата

$$\frac{1}{2}((x+y)^2+(x+1)^2+(y-1)^2)+2019.$$

Сваки од три квадрата је ненегативан, при чему постоје реални бројеви x, y за које су сва три израза истовремено једнаки нули: $x+y = x+1 = y-1 = 0$ важи за $x = -1, y = 1$. Према томе, најмања могућа вредност датог израза је 2019 и постиже се (једино) за бројеве $x = -1, y = 1$.

Уредништво

ЗАДАТАК СА НАСЛОВНЕ СТРАНЕ

Десет најуспешнијих решавалаца овог задатка биће награђено. Упутство за слање решења је на страни 48.

Између сваке две цифре у низу

1 2 3 4 5 6 7 8 9

уметни знак неке од четири основне рачунске операције и по потреби користи заграде тако да вредност добијеног израза буде 2020.

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА СА НАСЛОВНЕ СТРАНЕ ИЗ ПРОШЛОГ БРОЈА (МЛ LIV-3)

$$999 + 999 + 99 : 9 + 99 : 9 = 2020$$
$$9999 : 9 + 99 \cdot 9 + 9 \cdot 9 : 9 + 9 = 2020$$
$$9999 : 9 + 99 \cdot 9 + 9 + 9 + 9 - 9 = 2020$$

Награђени

Јања Костић, IV_1, ОШ „Светозар Марковић“, Врање
Нејла Хукић, V_2, ОШ „Авдо Међедовић“, Нови Пазар
Алекса Тошић, IV_3, ОШ „Љуба Нешић“, Зајечар
Лука Обућина, IV_3, ОШ „Светозар Марковић“, Краљево
Растко Дрљача, IV_2, ОШ „Бранко Радичевић", Мали Зворник
Вук Влајковић, V_2, ОШ „Бане Миленковић’’, Ново Село
Јелена Рајчетић, VII_2, ОШ „Херој Срба", Осипаоница
Ђорђе Манић, IV_1, ОШ „8. септембар“, Пирот
Емел Сакић, V_1, ОШ „Светозар Марковић“, Бродарево
Бранислав Лукић, V_1, ОШ „Петар Тасић“, Лешница

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА СПЕЦИЈАЛНИ ЗАДАТАК БРОЈ 100 (МЛ LIV-3)

Решење. Уместо пете звездице може стајати само један од бројева 4, 5 или 6, јер постоје бар три броја мања од броја на петом месту (то су бројеви који стоје на местима треће, четврте и шесте звездице). Размотримо сва три случаја.

(1) Ако је на петом месту број 4, онда је на другом месту број 6 (јер на сваком од преосталих места стоји број мањи од неког броја). Лако се види да сада на првом месту мора бити број 5. На шестом месту може бити било који од бројева 1, 2, 3, после чега је распоред бројева на трећем и четвртом месту једнозначно одређен. Дакле, у овом случају имамо 3 решења:

$$5 < 6 > 2 < 3 < 4 > 1,$$
$$5 < 6 > 1 < 3 < 4 > 2,$$
$$5 < 6 > 1 < 2 < 4 > 3.$$

(2) Ако је на петом месту број 5, онда на другом месту мора бити број 6. Тада на првом месту може бити било који од преостала 4 броја. За сваку од те четири могућности, број на шестом месту може се изабрати на три начина, после чега је распоред преостала два броја на трећем и четвртом месту једнозначно одређен. Дакле, у овом случају имамо 4 · 3 = 12 решења:

$$1 < 6 > 3 < 4 < 5 > 2,$$
$$1 < 6 > 2 < 4 < 5 > 3,$$
$$1 < 6 > 2 < 3 < 5 > 4,$$
$$2 < 6 > 3 < 4 < 5 > 1,$$
$$2 < 6 > 1 < 4 < 5 > 3,$$
$$2 < 6 > 1 < 3 < 5 > 4,$$

$$3 < 6 > 2 < 4 < 5 > 1,$$
$$3 < 6 > 1 < 4 < 5 > 2,$$
$$3 < 6 > 1 < 2 < 5 > 4,$$
$$4 < 6 > 2 < 3 < 5 > 1,$$
$$4 < 6 > 1 < 3 < 5 > 2,$$
$$4 < 6 > 1 < 2 < 5 > 3.$$

(3) Ако је на петом месту број 6, онда на другом месту може бити само један од бројева 5, 4 или 3 (јер постоје бар два броја мања од броја на другом месту). Размотримо сва три случаја.

(3а) Ако је на другом месту број 5, онда на првом месту може бити било који од бројева 1, 2, 3, 4. За сваку од те 4 могућности, број на шестом месту може се изабрати на три начина између три преостала броја, после чега је редослед преостала два броја на трећем и четвртом месту једнозначно одређен. Дакле, и у овом случају имамо $4 \cdot 3 = 12$ решења:

$$1 < 5 > 3 < 4 < 6 > 2,$$
$$1 < 5 > 2 < 4 < 6 > 3,$$
$$1 < 5 > 2 < 3 < 6 > 4,$$
$$2 < 5 > 3 < 4 < 6 > 1,$$
$$2 < 5 > 1 < 4 < 6 > 3,$$
$$2 < 5 > 1 < 3 < 6 > 4,$$
$$3 < 5 > 2 < 4 < 6 > 1,$$
$$3 < 5 > 1 < 4 < 6 > 2,$$
$$3 < 5 > 1 < 2 < 6 > 4,$$
$$4 < 5 > 2 < 3 < 6 > 1,$$
$$4 < 5 > 1 < 3 < 6 > 2,$$
$$4 < 5 > 1 < 2 < 6 > 3.$$

(3б) Ако је на другом месту број 4, онда број 5 мора бити на четвртом или на шестом месту. Размотримо обе могућности.

(3б1) Ако је број 5 на четвртом месту, онда се преостала три броја могу распоредити на 6 начина на прво, треће и шесто место. Дакле, у овом случају имамо 6 решења:

$$1 < 4 > 2 < 5 < 6 > 3,$$
$$1 < 4 > 3 < 5 < 6 > 2,$$
$$2 < 4 > 1 < 5 < 6 > 3,$$
$$2 < 4 > 3 < 5 < 6 > 1,$$
$$3 < 4 > 1 < 5 < 6 > 2,$$
$$3 < 4 > 2 < 5 < 6 > 1.$$

(3б2) Ако је број 5 на шестом месту, онда се број на првом месту може изабрати на 3 начина (један од бројева 1, 2, 3), после чега је редослед преостала два броја (на трећем и четвртом месту) једнозначно одређен. Дакле, у овом случају имамо три решења:

$$1 < 4 > 2 < 3 < 6 > 5,$$
$$2 < 4 > 1 < 3 < 6 > 5,$$
$$3 < 4 > 1 < 2 < 6 > 5.$$

(3ц) Ако је на другом месту број 3, онда на првом и трећем месту морају бити бројеви 1 и 2, при чему се они могу распоредити на два начина. У оба случаја се преостали бројеви 4 и 5 могу распоредити на четврто и шесто место на два начина. Дакле, у овом случају имамо $2 \cdot 2 = 4$ решења:

$$1 < 3 > 2 < 4 < 6 > 5,$$
$$1 < 3 > 2 < 5 < 6 > 4,$$
$$2 < 3 > 1 < 4 < 6 > 5,$$
$$2 < 3 > 1 < 5 < 6 > 4.$$

Дакле, има укупно 40 решења.

Награђени

Исидора Перуничић, $VIII_1$, Гимназија „Јован Јовановић Змај”, Нови Сад
Исидора Ковачевић, V_4, ОШ „Уједињене нације “, Београд
Мина Симић, VII_1, Ваљевска гимназија, Ваљево
Дуња Милићевић, $VIII_3$, ОШ „Стеван Јаковљевић“, Параћин
Јована Ракић, IV_2, ОШ „Деспот Стефан Лазаревић“, Бабушница
Андреј Јовић, V_1, ОШ „Бранко Радичевић“, Врање
Павле Јовановић, $VIII_2$, ОШ „Светозар Марковић“, Краљево
Јован Томић, $VII_{Б}$, ОШ „Јован Јовановић Змај“, Суботица

ЗАДАТАК ЗА РОДИТЕЉЕ

Најуспешнији решавалац овог задатка биће награђен. Упутство за слање решења налази се на страни 48.

P71. Мотоциклист и бициклист кренули су истовремено из *A* у *B*. Прешавши трећину пута од *A* до *B*, бициклиста се зауставио и кренуо је даље у тренутку кад је мотоциклисти остало да пређе трећину пута до *B*. Мотоциклист, дошавши до *B*, без заустављања је кренуо назад према *A*. Ко ће стићи пре: мотоциклист у *A* или бициклист у *B*, ако даље није било заустављања?

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА ИЗ ПРОШЛОГ БРОЈА

P70. За 6 кокошијих, 3 пачија и једно гушчије јаје треба платити 100 динара, а исто толико треба платити за 2 кокошија, једно пачије и 3 гушчија. Колико се гушчијих јаја може купити за 100 динара?

Решење. Нек су x, y, z редом цене кокошијег, пачијег и гушчијег јајета у динарима. Тада је

$$6x + 3y + z = 100 \text{ и } 2x + y + 3z = 100, \quad (1)$$

одакле је $6x + 3y + z = 2x + y + 3z$, односно $2z = 4x + 2y$, тј. $z = 2x + y$. Заменом у другу једначину из (1), добијамо да је $4z = 100$, тј. $z = 25$. Дакле, за 100 динара могу се купити тачно 4 гушчија јајета.

За решење задатка награђен је ***Далибор Бошковић***, Богдана Капелана бб, Гуча.

Задатак су тачно решили и:

Шарлота Томић, Суботица; *Стојан Костић*, Звечка; *Сашко Николић*, Владичин Хан; *Зоран Крстић*, Пирот; *Нина Павловић*, Крагујевац; *Горан Јовић,* Врање; *Спасоје Перуничић,* Нови Сад; *Зоран Ковачевић*, Београд; *Ивона Антић-Јовановић*, Бор; *Зарко Шуманов*, Гуча; *Лана Добросављевић*, Деспотовац; *Марија Перић*, Лесковац; *Сања Крстић*, Врање; *Татјана Лепосавић,* Шабац; *Снежана Јовановић*, Краљево; *Зорица Лепосавић,* Нови Београд; *Биљана Радовановић*, Књажевац; *Светлана Савић*, Чуруг; *Мирослав Галоња,* Челарево.

ЗАДАТАК ЗА НАСТАВНИКЕ

Најуспешнији решавалац овог задатка биће награђен. Упутство за слање решења налази се на страни 48.

Н71. Од 4 штапа дужине 1 састављен је правоугли троугао и при томе је само један штап преломљен на два дела. Одреди површину тога троугла.

РЕШЕЊЕ ЗАДАТАКА ИЗ ПРЕТХОДНОГ БРОЈА

Н70. На једном такмичењу Марко је гађао из ваздушне пушке у мету. Десетку је погодио исто толико пута колико и осмицу. Поред тога, неколико пута је погодио петицу и на тај начин сакупио укупно 99 поена. У 25% покушаја промашио је мету. Колико је пута укупно Марко пуцао из пушке?

Решење. Означимо са x број погодака у десетку (и у осмицу), а са y број погодака у петицу. Тада је Марко имао укупно $2x + y$ погодака у мету, при чему је то 75% свих покушаја, и при томе је постигао $10x + 8x + 5y$ поена. По услову задатка је

$$18x + 5y = 99. \quad (1)$$

Одавде лако налазимо једино решење диофантске једначине (1) у скупу природних бројева: $x = 3$; $y = 9$. Следи да је Марко имао $2 \cdot 3 + 9 = 15$ погодака, што чини укупно 75% покушаја. Сад лако налазимо да је он гађао укупно 20 пута.

За решење задатка награђена је ***Тот Габриела***, ОШ „Јанош Хуњади“, Чантавир.

Задатак су тачно решили и:

> *Далибор Бошковић*, ОШ „Академик Миленко Шушић“, Гуча; *Јелена Карањац*, ОШ „Јован Јовановић Змај“, Стопања; *Славко Михајловић*, ОШ „Живко Томић“, Доња Шаторња; *Сашко Николић*, ОШ „Свети Сава“, Владичин Хан; *Тања Савић*, ОШ „Бранко Радичевић“, Марадик; *Илија Хојт*, ОШ „Вељко Дугошевић“, Рума; *Саша Јовановић*, ОШ „ Душан Радовић“, Бор; *Жарко Шуманов*, ОШ „Академик Миленко Шушић“, Гуча; *Зоран Ковачевић*, Петефијева 20, Београд; *Дејан Стајић*, ОШ „Бора Станковић“, Врање; *Тамара Милутинов*, ОШ „Милена Павловић Барили“, Београд; *Зоран Денић*, ОШ „Свети Сава“, Ниш; *Бранимир Лапчевић*, ОШ „Стојан Новаковић“, Блаце; *Маја Николић*, ОШ „Херој Срба“, Осипаоница; *Маја Стојановић*, ОШ „Деспот Стефан Лазаревић“, Бабушница; *Драган Вуковић*, ОШ „Вељко Дугошевић“, Рума; *Славица Вуковић,* ОШ „ Јован Јовановић Змај“, Брус.

ЛОГИКА ЈЕ ЛОГИКА ЈЕ ЛОГИКА

У овој рубрици објављиваћемо задатке за чије решавање је у већој мери потребна досетљивост и логичко расуђивање, а у мањој мери познавање стандардног школског градива. Позивамо и читаоце да шаљу предлоге задатака за ову рубрику.

Задаци

57. У разговору Драган је саопштио Павлу: "Мој деда и ја смо недавно прославили рођендан истог дана, моје и његове године изражавају се бројевима са истим цифрама, а разлика та два броја једнака је нашем кућном броју." Затим је Драган саопштио Павлу свој кућни број, после чега је Павле брзо израчунао године старости и Драгана и његовог деде. Уз разумну претпоставку да Драган има мање од 100 година, одреди његов кућни број.

58. Илија и Марко замислили су по један природан број и саопштили га Милошу. Милош је на једном листу папира записао збир тих бројева, а на другом њихов производ. Затим је један лист сакрио, а други, на коме је био број 2002, показао Илији и Марку. Кад је видео број, Илија је рекао да не зна који је број замислио Марко. Кад је то чуо, Марко је рекао да не зна број који је замислио Илија. Који је број замислио Марко?

Решења задатака из претходног броја

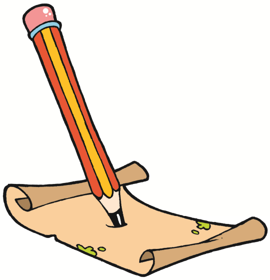
55. За округлим столом седи дванаесторо деце. Дечаци увек говори истину дечацима, а лажу девојчицама, а девојчице увек говоре истину девојчицама, а лажу дечацима. Свако дете је свом десном суседу за столом рекло једну реченицу: "Ти си дечак" или "Ти си девојчица". Изговорен је исти број првих и других реченица. Колико за столом има дечака, а колико девојчица?

Решење. Из услова задатка закључујемо да су сви дечаци изговорили исту реченицу: "Ти си дечак". заиста, ако је његов десни сусед дечак, његова реченица је истинита; ако је девојчица, реченица је неистинита. Слично закључујемо да је свака девојчица изговорила реченицу: "Ти си девојчица". Како је изговорен исти број једних и других реченица, следи да је број дечака једнак броју девојчица.

56. После фудбалске утакмице између екипа 7. и 8. разреда, три ученика су исказала по два тврђења:
Аца: Ја сам дао три гола. Илија је дао само један.
Илија: Ја сам дао четири гола. Марко је дао пет.
Марко: Ја сам дао шест голова. Аца је дао само два.
Познато је да је сваки од њих изрекао једно истинито тврђење и једно лажно.
Стојадин, који је био само навијач, рекао је: На утакмици је постигнуто укупно 10 голова.
Да ли је Стојадин рекао истину?

Решење 1. Могућа су два случаја:

(1) Прва Ацина изјава је тачна, тј. он је постигао три гола. Тада је Маркова изјава о Аци лажна; дакле, о себи је рекао истину, тј. он је постигао 6 голова. Следи да је Илијина изјава о Марку лажна, а истина је да је Илија постигао 4 гола. У овом случају, на утакмици је постигнуто укупно 3 + 6 + 4 = 13 голова.



(2) Није тачна прва Ацина изјава, него друга, тј. Илија је дао један гол. Тада је прва Илијина изјава нетачна, а друга тачна, тј. Марко је постигао 5 голова. На основу Маркових изјава тада закључујемо да је Аца постигао 2 гола, У овом случају, на утакмици је постигнуто укупно 1 + 5 + 2 = 8 голова.
Дакле, није могуће да је на утакмици постигнуто укупно 10 голова. Стојадин није рекао истину.

Решење 2. Не. Три играча изрекла су укупно 6 тврђења, од којих су три тачна и три нетачна. О сваком од три играча дате су две изјаве, једна истинита и једна лажна. Закључујемо да је Аца дао или 2 или 3 гола, Илија - или 1 или 4, Марко - или 5 или 6. Збир 10 може се добити само на један начин: ако је Аца постигао 3 гола, Илија - 1, а Марко - 6. Међутим, тврђења "Аца је дао три гола" и "Илија је дао један гол" изрекао је исти дечак и не могу оба бити тачна. Дакле, Стојадин није рекао истину.

УПУТСТВО ЗА РЕШАВАОЦЕ

Решења можете слати на два начина:

Електронском поштом на адресу:

matematickilist@yahoo.com

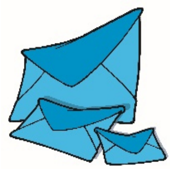
Откуцана решења (Word 2003 или LaTex) морају садржати образложење и прецизно нацртане слике. У поруци обавезно написати име, презиме, разред и одељење, назив школе, адресу школе и место, као и кућну адресу и место. Задатке из различитих рубрика слати у одвојеним порукама којима у Subject-у стоји назив рубрике (*на пример*: Задатак са насловне стране или Конкурсни задатак бр. 2143).

To: *matematickilist@yahoo.com*
Subject: Конкурсни задатак бр. 2143
Име и презиме, одељење, школа, адреса школе, место, кућна адреса, поштански број, место.

Као и до сада стандардном поштом.

Математички лист
Задатак са насловне стране
Кнез Михаилова 35/IV, п.п. 355
11000 Београд

Решења писати читко, сваки задатак на посебном листу уз обавезно образложење и прецизно нацртане слике. На сваком листу обавезно написати име и презиме, разред и одељење, назив школе, адресу школе и место, као и кућну адресу и место. Задатке из различитих рубрика стављати у засебне коверте на којима стоји назив рубрике (*на пример*: Задатак са насловне стране или Конкурсни задатак бр. 2143).



Решења која не испуњавају наведене услове неће се узимати у обзир.

Решења задатака из овог броја послати најкасније до 5.4.2020.

ВАЖНО ОБАВЕШТЕЊЕ ЗА ТАКМИЧАРЕ И ЊИХОВЕ НАСТАВНИКЕ

Друштво математичара Србије, односно Комисија за тамичење из математике ученика основних школа, у припреми задатака за такмичења користи задатке из **Математичког листа** текуће, као и две претходне школске године (у обзир долазе сви задаци, дакле из чланака, припремни, одабрани, конкурсни, наградни, као и задаци са такмичења), и то по принципу: најмање 3 задатка за школски, најмање 2 задатка за општински и најмање 1 задатак за окружни ниво такмичења. У тим задацима неки од података могу бити промењени.

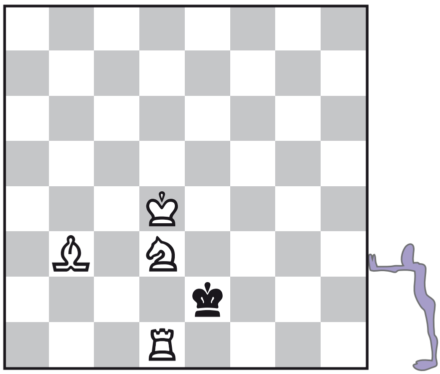
РЕШЕЊЕ НАГРАДНОГ ЗАДАТКА БРОЈ 147:   Kd1.

Награде су добили следећи ученици који су први послали тачно решење у предвиђеном року:

Урош Милутиновић, IV$_2$, ОШ " Јован Стерија Поповић ", Нови Београд
Сара Вучуревић, VII$_1$, ОШ " Жарко Зрењанин ", Нови Сад
Андрија Михајловић, VII$_2$, ОШ " Вук Караџић ", Лебане
Невена Костић, V$_2$, ОШ " Јован Јовановић Змај ", Обреновац
Милица Рајчевић, V$_a$, ОШ " Ђорђе Натошевић ", Нови Сад

НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК БРОЈ 148

Ласло Полгар, 2001.



Позиција на дијаграму:

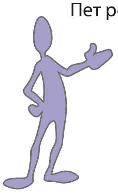
Бели: Kd4, Td1, Lb3, Sd3   Црни: Ke2

Бели вуче и даје мат у два потеза.

Решење послати најкасније до 05. 04. 2020. године

Пет решавалаца шаховског задатка који пошаљу тачно решење биће награђени.

Упутство за слање решења налази се на страни 48.



ВАЖНА ОБАВЕШТЕЊА ПРЕТПЛАТНИЦИМА

1. Математички лист је, пре свега, намењен ученицима III-VIII разреда основне школе. Излази пет пута годишње и то оријентационо: 01.09, 10.11, 25.01,15.03. и 05.05.

2. Претплата на Математички лист се врши на рачун:

Друштво математичара Србије 250-1420000245060-64
Београд, Кнез Михаилова 35/IV.

3. О условима претплате, школе ће бити благовремено обавештене. Све информације могу се добити на телефон и mail Друштва математичара Србије.

011/30 36 818 факс: **011/30 36 819**
drustvomatematicara@yahoo.com

4. Осим Математичког листа могу се наручити и остала издања Друштва математичара Србије.

5. Позивамо наставнике, професоре математике, ученике, као и све остале читаоце, да шаљу своје прилоге (чланке, задатке, занимљивости итд.). **Напомињемо да се рукописи не враћају.**

САДРЖАЈ

Животињска фарма 1
О разлагању троугла на четвороуглове 3
Рачунарство 6
Задаци из математике 8
Математичка такмичења 24
Одабрани задаци 29
Конкурсни задаци 33
Наградни задаци 38
Задатак са насловне стране 41
Резултати конкурса за специјални задатак 42
Задатак за родитеље 44
Задатак за наставнике 45
Логика је логика је логика 46
Упутство за решаваоце 48
Шаховска страна .... трећа страна корица